

第二十一届华罗庚金杯少年数学邀请赛 初赛试卷（初二组）

一、选择题（每小题 10 分，共 60 分，以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将表示正确答案的英文字母写在每题的圆括号内。）

1. 已知 $a+b=\sqrt{5}$ ，则 $\frac{a^2-a^2b^2+b^2+2ab}{a+ab+b}+ab$ 等于（ ），

- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】

$$\begin{aligned} \frac{a^2-a^2b^2+b^2+2ab}{a+ab+b}+ab &= \frac{a^2+b^2+2ab+a^2b+ab^2}{a+ab+b} \\ &= \frac{(a+b)(a+ab+b)}{a+ab+b} = a+b = \sqrt{5} \end{aligned}$$

2. 如右图，已知 $AE=DE=5, AB=CD, BC=4, \angle E=60^\circ$ ，

$\angle A=\angle D=90^\circ$ ，那么五边形 $ABCDE$ 的面积是（ ）

- A. $6\sqrt{2}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $7\sqrt{2}$ D. $7\sqrt{3}$

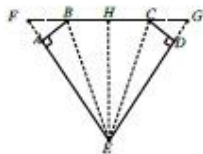


【答案】D

【解析】

连接 BE, EC ，延长 BC 交 EA 延长线和 ED 于 F, G 。过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H 。由题意得 $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ ，所以 EH 平分 $\angle FEG$ ，所以 $\triangle FEG$ 是等腰三角形，又因为 $\angle AED=60^\circ$ ，所以 $\triangle FEG$ 为等边三角形。所以 $AF=DG$ 。设 $AF=DG=x$ ，则 $FB=GC=2x$ ，此时有 $4+4x=5+x$ 得到 $x=\frac{1}{3}$ 。代入可得面积为

$$(5+\frac{1}{3})(5+\frac{1}{3})\sqrt{3}-2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$



3. 已知方程组： $\begin{cases} [x]+2y=1 \\ [y]+x=2 \end{cases}$ ，其中 $[x],[y]$ 分别表示不大于 x,y 的最大整数，则该方程组

的解有（ ）个。

- A.1 B.2 C.3 D.4

【答案】B

【解析】

由第二个式子可知 x 是整数，由第一个式子可知 y 的小数部分 $y-[y]$ 为0或者 $\frac{1}{2}$ 。

两式相减化简得到 $y+(y-[y])=-1$ ，所以 $y=-1,-\frac{3}{2}$ 代入验证后均符合题意，故此方程组有2组解

4. 某超市以每件10元的进价购进200件玩具，销售人员预期最近的促销活动：单价是19元时只能卖出100件，而单价每降低1元则可以多卖出20件。那么单价是（ ）元时，此次促销活动的预期获利最大。

- A.15 B.16 C.17 D.18

【答案】C

【解析】

设服装降价 x 元，此时可卖出 $100+20x$ ，此时服装的利润为

$$(19-x-10)(100+20x)=-20x^2+80x+900$$

$$=-20(x-2)^2+980$$

故 $x=2$ 时利润最大，此时单价是17元

5. 如下图所示，韩梅家的左右两侧各摆了3盆花。韩梅每次按照以下规则往家中搬一盆花：先选择左侧还是右侧，然后搬该侧离家最近的，要把所有的花搬到家里，共有（ ）种不同的搬花顺序。



- A.8 B.12 C.16 D.20

【答案】D

【解析】

韩梅每次只能选择搬左侧或者右侧的花，左侧和右侧分别只能选择三次，我们将三个左和三个右组成的排列（例如：左左右右右右是一种排列）分别对应一种搬花的顺序，并且不同的排列对应不同的搬花的顺序。所以三个左和三个右组成的排列的个数与搬花顺序的个数相同。故只需考虑所以三个左和三个右组成的排列的个数。对于这种排列只需要考虑在6个位置中选择三个为左的个数，这样的个数一共有 $C_6^3=20$ 。

6. 已知 $x + \frac{1}{x} - \sqrt{5} = 0$, 则 $|x^{16} - 46x^8 - 6x^4 - 3x^2| = (\quad)$

- A.1 B.2 C.3 D.4

【答案】C

【解析】

由 $x + \frac{1}{x} - \sqrt{5} = 0$, 可得 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 7$, $x^8 + \frac{1}{x^8} = 47$

化简得 $x^4 - 3x^2 = -1$, $x^8 - 7x^4 = -1$, $x^{16} - 47x^8 = -1$

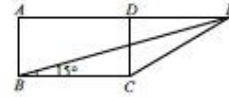
所以 $|x^{16} - 46x^8 - 6x^4 - 3x^2| = |x^{16} - 47x^8 + x^8 - 7x^4 + x^4 - 3x^2|$

$= |-1 + -1 + -1| = 3$

二、填空题 (每小题 10 分, 共 40 分)

7. 如右图, $ABCD$ 是长方形, $AB=1, BC=2$, $\angle EBC = 15^\circ$,

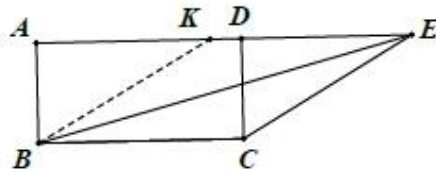
E 在 AD 的延长线上, 则 CE 等于_____.



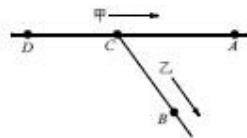
【答案】2

【解析】

在 AE 上去一点 K 使得 $BK=2$, 连接 BK , 则 $\angle AKB = 30^\circ$, 所以 $\angle KBE = \angle CBE = 15^\circ$, 所以 $\angle KBE = \angle KEB = 15^\circ$, 于是有 $EK = BK = 2$, 所以四边形 $KBCE$ 为平行四边形, 所以 $CE = BK = 2$.



8. 如右图, 乙是主河流甲的支流, 水流流向如箭头所示, 主流和支流的水流速度相等, 船在主流和支流中的静水速度也相等. 已知 $AC=CD$, 船从 A 处经 C 开往 B 处需用 6 小时, 从 B 经 C 到 D 需用 8 小时, 从 D 经 C 到 B 需用 5 小时, 则船从 B 经 C 到 A , 再从 A 经 C 到 D 需用_____小时.



【答案】 $12\frac{1}{3}$

【解析】

设 $AC=CD=a$, $CB=b$, 静水速度为 v , 水流速度为 s . 由题意得

$$\frac{a}{v-s} + \frac{b}{v+s} = 6$$

$$\frac{a}{v-s} + \frac{b}{v-s} = 8$$

$$\frac{a}{v+s} + \frac{b}{v+s} = 5$$

由后两个式子可以得到 $\frac{1}{v-s} = \frac{8}{a+b}$, $\frac{1}{v+s} = \frac{5}{a+b}$ 代入第一个式子化简得到 $b=2a$

船从 B 经 C 到 A , 再从 A 经 C 到 D 需用时:

$$\frac{b}{v-s} + \frac{a}{v+s} + \frac{2a}{v-s} = (2a+b) \cdot \frac{8}{a+b} + a \cdot \frac{5}{a+b} = \frac{21a+8b}{a+b}$$

将 $b=2a$ 代入得到

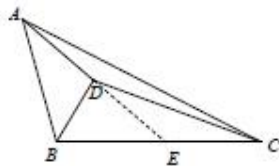
$$\frac{21a+8b}{a+b} = \frac{21a+16a}{a+2a} = \frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}$$

9. 如右图, 三角形 ABC 中, BD 平分 $\angle ABC$, AD 垂直于 BD , 三角形 BCD 的面积为 45, 三角形 ADC 的面积为 20, 则三角形 ABD 的面积等于_____.

【答案】25

【解析】

延长 AD 交 BC 与 E , 由于 BD 是 $\triangle ABE$ 的 BE 边上的高和角平分线, 所以 $AD=DE$. 所以 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle CDE} = 20$, $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDE}$, 所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle CDE} = 45 - 20 = 25$



10. 已知 A, B, C, D, E 代表 1 至 9 中不同的数字, $\overline{ABCD} + \overline{EEE} = 2015$, 则 \overline{ABD} 的
最大值等于_____.

【答案】961926

【解析】

首先, 和一定时, 差越小积越大, 所以 \overline{EEE} 越大, 乘积越大. 验证 $E=9, 8, 7$ 时均无

解, 而当 $E=7$ 时, $\overline{ABCD} = 1238$, $\overline{EEE} = 777$, 此时符合题意且积最大, 此时积为 $1238 \times 777 = 961926$