

第五届“学用杯”

全国数学知识应用竞赛 九年级初赛试题卷

(本卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

题号	一	二	三	四	总分
得分					

得分		评卷人	
----	--	-----	--

一、填空题 (每小题 6 分, 共 36 分)

1. 如图 1 的 $\odot A$ 和 $\odot B$ 是抗日战争时期敌人要塞阵地的两个“母子碉堡”, 被称为“母子碉堡”. $\odot A$ 的半径是 6 米, “子碉堡” $\odot B$ 的半径是 3 米, 两个碉堡中心的距离 $AB = 80$ 米. 我侦察兵在安全地带 P 的视线恰好与敌人的“母子碉堡”都相切, 为了打击敌人, 必须准确地计算出点 P 到敌人两座碉堡中心的距离 PA 和 PB 的大小, 请你利用圆的知识计算出

$PA = \underline{\hspace{2cm}}$, $PB = \underline{\hspace{2cm}}$.

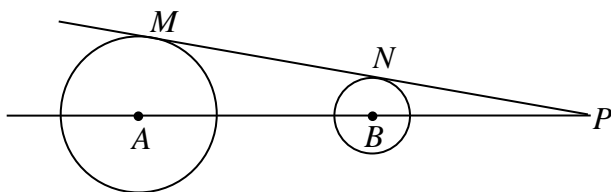


图 1

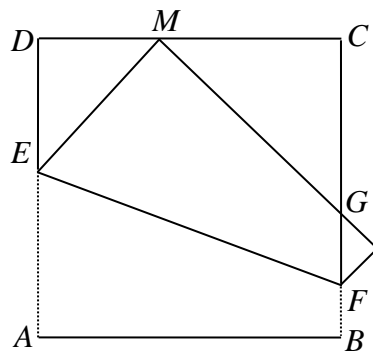


图 2

2. 小丽将一个边长为 $2a$ 的正方形纸片 $ABCD$ 折叠, 顶点 A 落到 CD 边上的点 M 的位置, 折痕交 AD 于 E , 交 BC 于 F , 边 AB 折叠后与 BC 边交于点 G (如图 2). 在折叠过程中, 小丽发现当点 M 在 CD 边上的任意位置时, (点 C, D 除外), $\triangle CMG$ 的周长总是相等的, 那么 $\triangle CMG$ 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 国际蔬菜科技博览会开幕, 学校将组织 360 名师生乘车参观. 某客车出租公司有两种客车可供选择: 甲种客车每辆 40 个座位, 租金 400 元; 乙种客车每辆 50 个座位, 租金 480 元, 则租用该公司客车最小需付租金 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元.

4. 光明路新华书店为了提倡人们“多读书, 读好书”, 每年都要开展分年级免费赠书活动, 今年获得免费赠书的前提是: 顺利通过书店前的 A, B, C 三个房间 (在每个房间内都有一道题, 若能在规定的时间内顺利答对这三道题, 就可免费得到赠书), 同学们你们想参加吗? 快快行动吧! (请把答案写在每间房所提供的答题卡上)

A 房间

在 $\triangle ABC$ 中,
 $AB = 2$,
 $AC = \sqrt{2}$,
 $\angle B = 30^\circ$, 求
 $\angle BAC$ 的度数.

B 房间

已知直角三角形两边
 x, y 的长满足
 $|x^2 - 4| + \sqrt{y^2 - 5y + 6} = 0$,
 求第三边的长.

C 房间

$\odot O$ 的半径 $OA = 2$, 弦
 AB, AC 的长分别为方程
 $x^2 - (2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})x + 4\sqrt{6} = 0$
 的两个根, 求 $\angle BAC$ 的度数.

题目并不难哟，把答案写在下面吧！

A 房间答题卡：_____；

B 房间答题卡：_____；

C 房间答题卡：_____。

5. 某校数学课外活动探究小组，在教师的引导下，对“函数 $y = x + \frac{k}{x} (x > 0, k > 0)$ 的性质”作了如下探究：

因为 $y = x + \frac{k}{x} = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{k}{x}} + (\sqrt{\frac{k}{x}})^2 + 2\sqrt{k} = (\sqrt{x} - \sqrt{\frac{k}{x}})^2 + 2\sqrt{k}$ ，所以当 $x > 0$ ，

$k > 0$ 时，函数 $y = x + \frac{k}{x}$ 有最小值 $2\sqrt{k}$ ，此时 $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{k}{x}}$ ， $x = \sqrt{k}$ 。

借助上述性质：我们可以解决下面的问题：

某工厂要建造一个长方体无盖污水处理池，其容积为 $4\ 800\text{m}^3$ ，深为 3m ，如果池底每平方米的造价为 150 元，池壁每平方米的造价为 120 元，问怎样设计水池能使总造价最低，最低总造价为_____元。

6. 某公司员工分别住在 A, B, C 三个住宅区，A 区有 30 人，B 区有 15 人，C 区有 10 人，三个区在一条直线上，位置如图 3 所示。公司的接送车打算在 A 区，B 区，C 区中只设一个停靠点，要使所有员工步行到停靠点的路程总和最小，那么停靠点的位置应在_____。

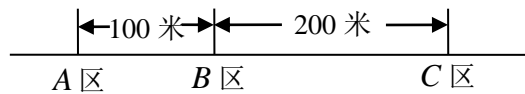


图 3

得分		评卷人	
----	--	-----	--

二、选择题（每小题 6 分，共 36 分）

7. 如图是一个圆形的街心花园，A, B, C 是圆周上的三个娱乐点，且 A, B, C 三等分圆周，街心花园内除了沿圆周的一条主要道路外还有经过圆心的沿 AOB, BOC, AOC 三条道路，一天早晨，有甲、乙两位晨练者同时从 A 点出发，其中甲沿着圆走回原处 A，乙沿着 AOB,

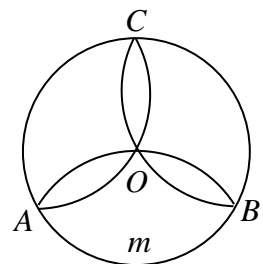


图 4

BOC, COA 也走回原处，假设他们行走的速度相同，则下列结论正确的是（ ）

- A. 甲先回到 A B. 乙先回到 A C. 同时回到 A D. 无法确定

8. 小明很喜欢打篮球，他是班里篮球队的主力队员，恰好这个星期他所在的九年级十个班要进行篮球比赛，比赛是每五个队进行单循环比赛，得分规则如下表，小组赛总积分最高的两个队可以参加半决赛，若总积分相同还要按下一步的规则排序。

	胜	平	负
每场得分	3	1	0

现在小明若想直接进入半决赛，问小明所在的队至少要积（ ）

- A. 9分 B. 10分 C. 11分 D. 12分

9. 如图 5, A, B, C 是固定在桌子上的三根立柱, 其中 A 柱上穿有三个大小不同的圆片, 下面的直径总比上面的大, 现想将这三个圆片移动到 B 柱上, 要求每次只能移动一片 (叫移动一次), 被移动的圆片只能放入 A, B, C 三个柱之一, 且较大的圆片不能叠在小圆片的上面, 那么完成这件事至少要移动圆片的次数是 ()

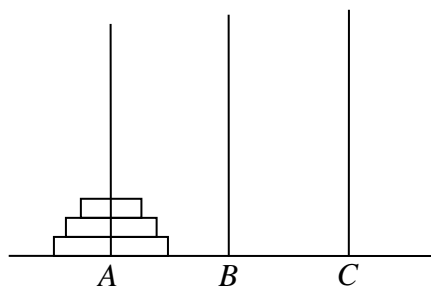


图 5

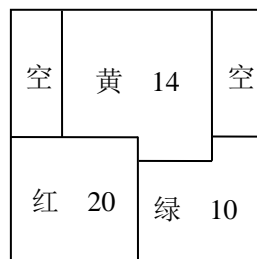


图 6

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

10. 有红、黄、绿三块面积均为 20cm^2 的正方形纸片, 放在一个底面是正方形的盒子内, 它们之间互相叠合 (如图 6), 已知露在外面的部分中, 红色纸片面积是 20cm^2 , 黄色纸片面积是 14cm^2 , 绿色纸片面积是 10cm^2 , 那么正方形盒子的底面积是 ()

- A. $\frac{256}{5}\text{cm}^2$ B. 54cm^2 C. 48cm^2 D. $\frac{246}{5}\text{cm}^2$

11. 小明玩套圈游戏, 套中小鸡一次得 9 分, 套中小猴一次得 5 分, 套中小狗一次得 2 分, 小明共套 10 次, 每次都套中了, 每个小玩具都至少套中一次, 小明套 10 次得 61 分, 则小鸡被套中 ()

- A. 2 次 B. 3 次 C. 4 次 D. 5 次

12. 如图 7, 在边长是 20m 的正方形池塘周围是草地, 池塘边 A, B, C, D 处各有一棵树, 且 $AB = BC = CD = 4\text{m}$, 现用长 5m 的绳子将一头牛拴在一棵树上, 为了使牛在草地上活动区域的面积最大, 应将绳子拴在 ()

- A. A 处或 C 处 B. B 处 C. B 处或 D 处 D. D 处

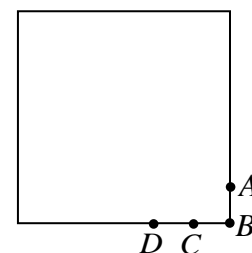


图 7

得分		评卷人	
----	--	-----	--

三、解答题 (本大题共 3 个小题, 满分 38 分)

13. (本题 12 分) 阳光中学全体学生都办理了一种“学生团体住院医疗保险”, 保险公司按下表中的级距分段计算付给被保险人的“住院医疗险金”。

级别	被保险人住院医疗费用级距	保险公司给付比例
1	1 000 元及以下部分	55%
2	1 000 元至 4 000 元部分	60%
3	4 000 元至 7 000 元部分	70%
4	7 000 元至 10 000 元部分	80%
5	10 000 元至 30 000 元部分	90%

6	30 000 以上部分	95%
---	-------------	-----

(注: 在被保险期间, 被保险人按上述标准累计自付金额超过 6 000 元的部分, 保险公司按 100% 的标准给付)

现在, 该中学的学生李明因病住院, 除去保险公司给付的“住院医疗保险金”外, 李明的家人又支付了医疗费用 3 000 元. 请问保险公司为李明支付了多少保险金?

14. (本题 12 分) 轻纺城服装批发市场经营季节性服装, 当季节即将来临时, 服装价格呈上升趋势. 设某种服装开始时预定价为每件 10 元, 从第一周上市开始每周 (7 天) 涨价 2 元, 从第 5 周开始保持 20 元的价格平稳销售; 在季节即将过去时, 从第 11 周开始, 服装批发市场开始削价, 平均每周削价 2 元, 直到 16 周周末后, 该服装已不再销售.

(1) 试建立价格 y 与周次 x 之间的函数关系;

(2) 若此服装每件进价 Q 与周次 x 之间的关系为:

$Q = -0.125(x-8)^2 + 12$ ($0 \leq x \leq 16$, 且 x 是整数), 试问该服装第几周每件销售利润 M 最大?

15. (本题 14 分) 如图 8, 某房地产开发公司购得一块三角形地块, 在靠近 $\angle B$ 的内部有一千年的古樟树要加以保护, 市政府规定要过 P 点划一三角形的保护区, 你怎样划这条线才能使被划去的 $\triangle BDE$ 的面积最小? 为什么?

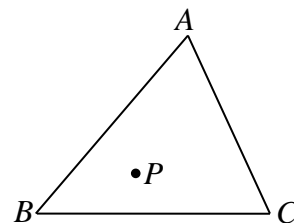


图 8

得分		评卷人	
----	--	-----	--

四、开放题（本大题满分 40 分）

16.（本题 20 分）在生活中不难发现这样的例子：三个量 a 、 b 和 c 之间存在着数量关系 $a = bc$ 。例如：长方形面积 = 长 \times 宽，匀速运动的路程 = 速度 \times 时间。

（1）如果三个量 a 、 b 和 c 之间有着数量关系 $a = bc$ ，那么：

①当 $a = 0$ 时，必须且只须_____；

②当 b （或 c ）为非零定值时， a 与 c （或 b ）之间成_____函数关系；

③当 $a(a \neq 0)$ 为定值时， b 与 c 之间成_____函数关系。

（2）请你编一道有实际意义的应用性问题，解题所列的方程符合数量关系： $\frac{a}{x} = \frac{b}{x-c}$ ，（其中 x 为未知数， a 、 b 、 c 为已知数，不必解方程）。

17.（本题 20 分）金字塔是古代世界著名的奇迹之一，矗立在尼罗河西岸的 70 多座金字塔，每年都吸引着来自世界各地的游客，流连在金字塔下，抬眼望去，几十层楼高的塔像柄巨剑直刺云天，显得气势非凡。此刻，游人心里很自然地会想：金字塔究竟有多高呢？

假设你是一位游人，如何测量金字塔的高度呢？写出你的测量方案，并说明理由（注意：至少提供两种测量方案，并且，你的方案一定要切实可行）。

第五届“学用杯”全国数学知识应用竞赛

九年级初赛试题卷参考答案

一、填空题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 160 米，80 米 2. $4a$ 3. 3 520 元 4. $A: 105^\circ$ 或 15° ； $B: 2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{13}$ 或

$\sqrt{5}$ ； $C: 15^\circ$ 或 75° 5. 297 600 6. A 区

二、选择题（每小题 6 分，共 36 分）

7~12. C B B A D B

三、解答题（13题12分，14题12分，15题14分，满分38分）

13. 解：当住院医疗费为7000元时，被保险人应支付：

$$1\ 000 \times (1 - 55\%) + 3\ 000 \times (1 - 60\%) + 3\ 000 \times (1 - 70\%) = 2\ 550 \text{ (元)}.$$

由于李明家支付费用3000元 > 2550元，

所以李明住院的医疗费用在7000元至10000元之间（即第4级别）.5分

所以超过7000元部分的医疗费为：(3000 - 2550) ÷ (1 - 80%) = 2250元.

所以保险公司为李明给付的保险费应为：7000 + 2250 - 3000 = 6250元. ...11分

答：保险公司要再为李明给付保险金6250元（付给医院）.12分

14. 解：（1）根据价格的“上升”、“平稳”、“削价”，建立分段函数.

$$y = \begin{cases} 10 + 2x & (0 \leq x \leq 5, \text{且} x \text{是整数}) \cdots \cdots 1 \text{分} \\ 20 & (5 \leq x \leq 10, \text{且} x \text{是整数}) \cdots \cdots 3 \text{分} \\ 40 - 2x & (10 \leq x \leq 16, \text{且} x \text{是整数}) \cdots \cdots 5 \text{分} \end{cases}$$

（2）每件利润 = 每件售价 - 每件进价，即 $M = y - Q$ ，所以当 $0 \leq x \leq 5$ 时，

$$M = 10 + 2x - [-0.125(x - 8)^2 + 12] = 0.125x^2 + 6.$$

所以当 $x = 5$ 时， M 取最大值9.125元.7分

当 $5 \leq x \leq 10$ 时， $M = 0.125x^2 - 2x + 16$.

所以当 $x = 5$ 时， M 取最大值9.125元.9分

当 $10 \leq x \leq 16$ 时， $M = 0.125x^2 - 4x + 36$.

所以当 $x = 10$ 时， M 取最大值8.5元.11分

以上 x 的取值均为整数，因此，该服装第5周每件销售利润 M 最大.12分

15. 过 P 作直线 $DE \parallel AB$ ，交 BC 于 D ，交 AC 于 E ，在 BC 上取点 F ，使 $DF = BD$ ，延长 FP 交 AB 于点 G ，则 $\triangle BFG$ 的面积最小.6分

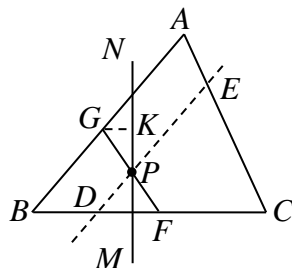
证明：若过 P 任作一直线，交 BC 于 M ，交 AB 于 N ，

过 G 作 $GK \parallel BC$ ，交 MN 于 K8分

由 $DP \parallel AB$ ， $BD = DF$ 知： DP 是 $\triangle BFG$ 的中位线，得 $PG = PF$.

进而可得 $\triangle MPF \cong \triangle KPG$12分

$S_{\triangle NPG} > S_{\triangle MPF}$ ，所以 $S_{\triangle BMN} > S_{\triangle BFG}$14分



四、开放题（每小题20分，共40分）

16. （1）① b 或 c 中有一个为零；② 正比例；③ 反比例.（每空2分，共6分）

(2) 答案不惟一.

评分标准: (满分共计 14 分)

- ①编写题目符合实际 (5 分);
- ②解题所列方程符合所要求的数量关系 (7 分);
- ③题目新颖、有创新意义 (2 分).

17. 方案一: 应用相似三角形知识

如图 1 所示: 在距离金字塔一定距离的 D, F 两点, 分别竖立两个竿 CD 和 EF (长度都为 h), 当人分别站在 M, N 两点时能保证 A, C, A, I 分别在一条直线上测出 MN, FN, MD 的距离, 则塔高即可得到 (其中人的高度忽略不计).

理由如下:6 分

从图中易知: $\text{Rt}\triangle MCD \sim \text{Rt}\triangle MAB$, $\text{Rt}\triangle NEF \sim \text{Rt}\triangle NAB$7 分

可得 $\frac{AB}{CD} = \frac{MB}{MD}$, 即 $AB \cdot MD = MB \cdot CD$. ①8 分

$\frac{AB}{EF} = \frac{NB}{FN}$, 即 $AB \cdot FN = NB \cdot EF$. ②9 分

②-①得 $AB \cdot (FN - MD) = (NB - MB) \cdot CD$.

又知 $MN = NB - MB$, 可得 $AB = \frac{MN \cdot CD}{FN - MD}$.

因为 CD 已知, MN, FN, MD 均可测出,

所以 AB 的高度可以计算得出.10 分

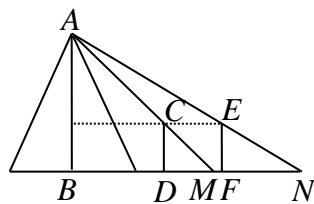


图 1

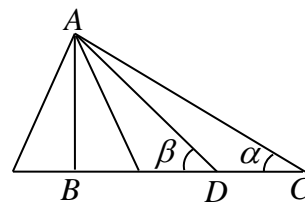


图 2

方案二: 应用解直角三角形知识

如图 2 所示, 在平面内取 C, D 两点, 使 B, C, D 三点在同一条直线上, 用测角器在 C, D 两点分别测得塔顶 A 的仰角为 α, β , 再测量出 CD 间的距离, 则塔高可求得 (测角器的高度忽略不计).

理由如下:6 分

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 和 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中,

$CB = AB \cdot \cot \alpha$, $DB = AB \cdot \cot \beta$.

因为 $CB - DB = CD$,7 分

所以 $AB \cdot \cot \alpha - AB \cdot \cot \beta = CD$,

所以 $AB \cdot \cot \alpha - AB \cdot \cot \beta = CD$8 分

所以 $AB = \frac{CD}{\cot \alpha - \cot \beta}$.

因为 CD, α, β 都可以测出, 所以塔高 AB 可求得.10 分

(方案设计合理，正确可酌情给分)