

## 第六届“学用杯”

### 全国数学知识应用竞赛 九年级决赛试题

#### 一、判断决策（本题 20 分）

光华中学要选派一名学生去参加区级电脑知识竞赛，王峰和朱倩两位同学平时电脑都学的不错，为了确定谁去参赛，老师对他们的电脑知识进行了 10 次模拟测验，测验成绩情况如下面的折线统计图（图 1）：

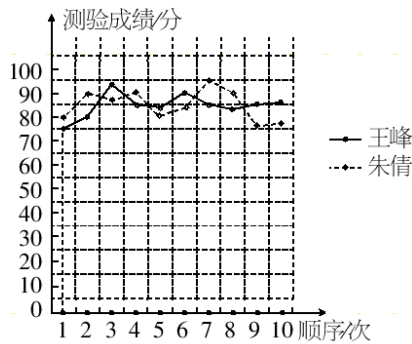


图 1

利用此图表信息，根据你学过的统计知识，分析王峰和朱倩的成绩，你认为谁去参赛更好些？

#### 二、实践应用（本题 20 分）

某生活小区为了改善居民的居住环境，把一部分平房拆除后准备建几栋楼房，由于某种原因，最北边的一排平房暂时没拆。如图 2，建筑工人准备在距离平房 55 米的地方（平房的南边）打地基建甲楼，已知甲楼预计 34 米高，平房的窗台高 1.2 米，该地区冬天中午 12 时阳光从正南方照射时，光线与水平线的最小夹角为  $30^\circ$ 。

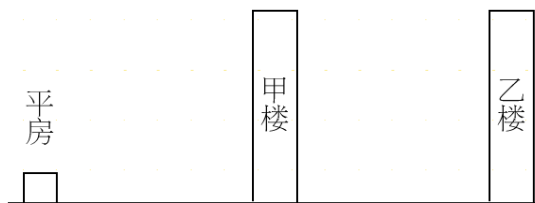


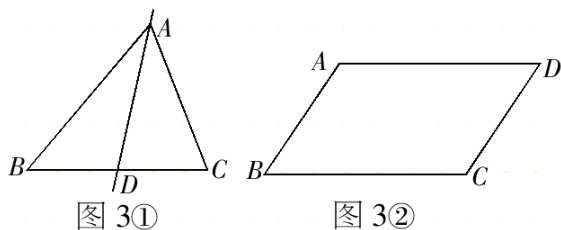
图 2

- (1) 甲楼是否会挡住平房的采光？为什么？
- (2) 假设在甲楼南边再建一栋同样高度的楼房乙楼，那么甲、乙两楼之间的距离最少为多少米才不影响甲楼采光？（已知甲楼 1 楼的窗台高 1.6 米，结果精确到 0.01 米）

#### 三、方案设计（本题 20 分）

亲爱的同学，你准备好了吗？让我们一起进行一次研究性学习：研究用一条直线等分几何图形的面积。我们很容易发现这样一个事实：

如图 3①，对于三角形  $ABC$ ，取  $BC$  边的中点  $D$ ，过  $A, D$  两点画一条直线，即可把  $\triangle ABC$  分为面积相等的两部分。



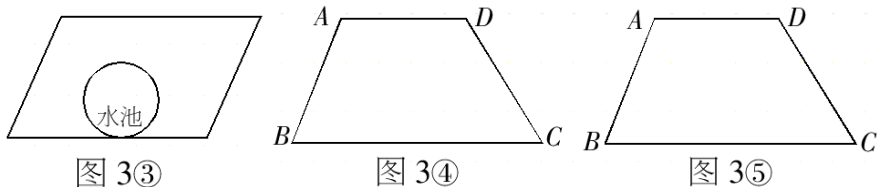
(1) 如图 3②, 对于平行四边形  $ABCD$ , 如何画一条直线把平行四边形  $ABCD$  分为面积相等的两部分.

答: \_\_\_\_\_ (写出一种方案即可). 理由是: \_\_\_\_\_.

(2) 受上面的启发, 请你研究以下两个问题:

①如图 3③, 一块平行四边形的稻田里有一个圆形的蓄水池, 现要从蓄水池引一条笔直的水渠, 并使蓄水池两侧的面积相等, 请你画出你的设计方案, 保留作图痕迹, 不必说明理由.

②某农业研究所有一块梯形形状的实验田如图 3④, 准备把这块实验田种上面积相同的西红柿和青椒 (都是新品种), 应该如何分割, 请你分别在图 3④、图 3⑤中设计两种不同的分割方案, 并说明理由.



#### 四、综合应用 (本题 20 分)

某旅游开发公司为了方便旅客, 购置 50 套卧具 (供旅客上山休息使用), 当每套卧具每晚租金为 30 元时, 卧具就会全部租完; 如果每套卧具租金每晚增加 1 元, 就会有一套卧具租不出去. 综合考虑各种因素, 每租出一套卧具需交付管理部门及其它费用 4 元. 设每套卧具每晚租金为  $x$  (元), 旅游开发公司每晚的收益为  $y$  (元).

(1) 当每套卧具每晚租金为 35 元、49 元时, 计算此时的收益.

(2) 求出  $y$  与  $x$  的函数关系式. (不要求写出  $x$  的取值范围)

(3) 旅游开发公司要获得每晚的最大的收益, 每套卧具每晚的租金应定为多少元? 每晚的最大收益是多少元?

#### 五、(本题 30 分) 材料作文

据说美国著名的数学家波利亚曾对学生作过这样一次测试:

他先在黑板上挂了一幅“画”——一张上面仅有一个黑色圆点的白纸, 然后问学生: “同学们, 你们看到了什么?” “一个黑点.” 全体同学一起回答. 然后, 学生们便沉静下来, 等待老师的讲解.

波利亚摇了摇头, 语重心长地说: “很遗憾, 你们只说对了极少的一部分, 画中更大的部分是空白. 只见小, 不见大; 只见微观, 不见宏观, 就会束缚自己的思考力和想象力.”

同学们, 读了这篇耐人寻味的故事, 你作何感想? 请结合你平时的数学学习写一篇 500 字左右的短文 (题目自拟).

#### 六、(本题 40 分) 数学作文

从下列题目中任选一个, 联系相关知识及现实生活, 写一篇数学短文, 字数控制在 1 000 字以内.

1. 至善至美的圆
2. 特殊四边形的魅力

3. 几何变换与美
4. 从概率我想到了……
5. 数学中的和谐
6. 我的“学用杯”情怀

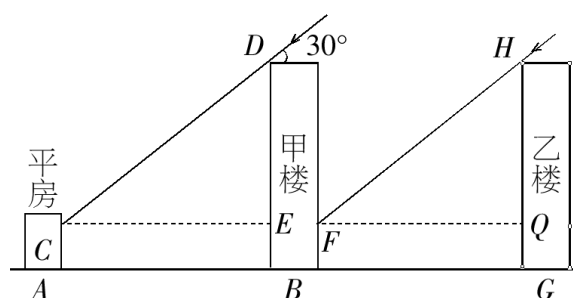
## 第六届“学用杯”全国数学知识应用竞赛

### 九年级 决赛试题

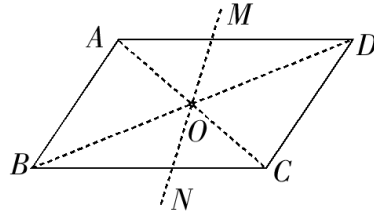
#### 参考答案

一、解：王峰和朱倩成绩的平均数都约是 85（分别是 84.6 和 84.9），中位数分别是 85 和 85.5。王峰成绩的众数是 85，朱倩成绩的众数是 90，从 85 分以上的频率看，王峰的成绩要好些，从众数来看，朱倩的成绩要好些；而从方差来看，王峰成绩的方差是 21.84，朱倩成绩的方差是 37.49。因此建议王峰参加竞赛（本题满分 20 分，注：由于读图有误差，只要通过求平均数、中位数、众数、方差等数据后，分析合理，即可酌情给分）。

二、解：如图：



- (1) 过  $C$  作  $CE \perp BD$  于  $E$ ,  $CE = AB = 55$  米.  
 $\because$  阳光入射角为  $30^\circ$ ,  
 $\therefore \angle DCE = 30^\circ$ . .....3 分
- 在  $\text{Rt}\triangle DCE$  中,  $\tan \angle DCE = \frac{DE}{CE}$ .  
 $\therefore DE = CE \cdot \tan \angle DCE = 55 \cdot \tan 30^\circ \approx 31.75$  (米). .....8 分  
 $\because 34 > 31.75 + 1.2 = 32.95$ ,  
 $\therefore$  甲楼挡住了平房的采光. ....10 分
- (2) 作  $FQ \perp HG$  于  $Q$ ,  
 $\because$  阳光入射角为  $30^\circ$ ,  
 $\therefore \angle HFQ = 30^\circ$ . .....13 分
- 在  $\text{Rt}\triangle HFQ$  中,  $\tan \angle HFQ = \frac{HQ}{FQ}$ ,  
 $\therefore FQ = \frac{HQ}{\tan \angle HFQ} = \frac{34 - 1.6}{\tan 30^\circ} \approx 56.12$  (米) .....18 分  
 $\therefore$  甲、乙两楼之间的楼距至少应为 56.12 米. ....20 分
- 三、(1) 连接两对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ , 过  $O$  点任作一直线  $MN$  即可 (如图).



(不妨设该直线与  $AD$ 、 $BC$  分别交于点  $M$ 、 $N$ ) .....2分

理由:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  $\therefore AO=CO, AD\parallel BC$ ,

$\therefore \angle MAO = \angle NCO$ ,

又  $\because \angle AOM = \angle CON$ ,

$\therefore \triangle AOM \cong \triangle CON$ .

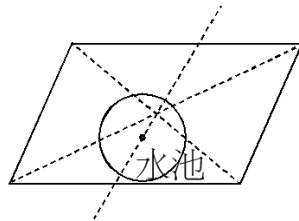
$\therefore S_{\triangle AMO} = S_{\triangle CNO}$ . .....4分

同理得  $S_{\triangle MOD} = S_{\triangle NOB}$ .

又易得  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$ ,

所以  $S_{\text{四边形}MNCD} = S_{\text{四边形}ABNM}$ .

(2) ①如图



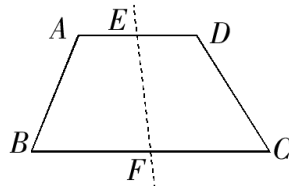
.....8分

②

方案一: 分别取  $AD$ 、 $BC$  的中点  $E$ 、 $F$ , 连接  $EF$ , 线段  $EF$  就是所求作的分割线.

理由:  $\because AE=ED, BF=FC$ ,

$$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = \frac{1}{2}(AE + BF)h = \frac{1}{2}(ED + FC)h = S_{\text{四边形}EFCD}$$

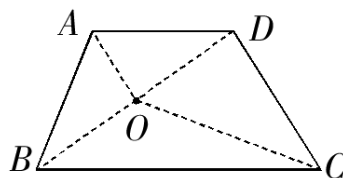


方案二: 连接  $BD$ , 取  $BD$  的中点  $O$ , 连接  $AO$ 、 $CO$ , 折线  $AOC$  可以把梯形分割为两个面积相等的图形.

理由:  $\because BO=OD, \therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD}, S_{\triangle BOC} = S_{\triangle DOC}$ ,

$\therefore S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle DOC}$ .

同理, 连接  $AC$ , 取中点  $O$ , 连接  $BO$ 、 $OD$ , 折线  $BOD$  可以把梯形分割为两个面积相等的图形 (图略).

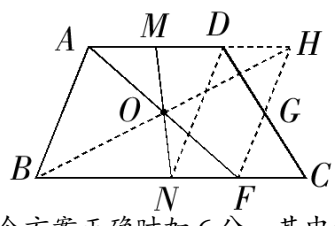


方案三: 取  $CD$  的中点  $G$ , 过  $G$  作  $FH\parallel AB$ , 与  $BC$  交于  $F$ , 与  $AD$  的延长线交于点  $H$ .

可证:  $S_{\triangle DHG} = S_{\triangle CFG}$ , 则过  $AF$  中点  $O$  且不穿越  $\triangle DHG$  或  $\triangle CFG$  或  $G$  点的直线均可把

梯形面积等分（如下图中的  $MN$ ）。

理由略。



（只要写出两种即可，每个方案正确时加 6 分，其中作图 2 分，理由 4 分。）

四、(1) 每晚租金为 35 元时，收益为 1 395 元；  
 每晚租金为 49 元时，收益为 1 395 元。 .....8 分

(2)  $y = -x^2 + 84x - 320$  . .....12 分

(3)  $\because y = -x^2 + 84x - 320$

$$= -(x - 42) + 1$$

$\therefore$  每套卧具每晚的租金应定为 42 元，此时有最大收益为 1 444 元。 ..... 20 分

五、说明：本题旨在让学生根据材料归纳出全面看问题的思路，由此展开议论或说明，若得出其他结论，只要说的有道理，可酌情给分。

六、略。