

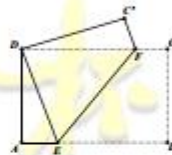
# 第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛 决赛试题 B (初一组)

(时间: 2013 年 4 月 20 日 10:00~11:30)

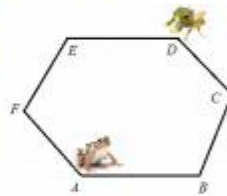
## 一、填空题 (每小题 10 分, 共 80 分)

1. 已知  $a+b=18$ ,  $ab=17$ , 求  $a-b=$ \_\_\_\_\_.
2. 若干人完成了植树 2013 棵的任务, 每人植树的数目相同. 如果有 4 人不参加植树, 则剩余的人每人多植 2 棵不能完成任务, 而每人多植 3 棵可以超额完成任务. 那么共有\_\_\_\_\_人参加了植树.

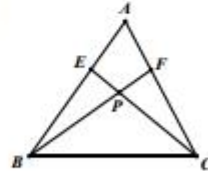
3. 将长方形纸片  $ABCD$  一组对角的顶点  $B, D$  重合, 压平, 折成左面的图形  $AEFC'D$ . 如果  $AB = a$ ,  $AD = b$ , 则三角形  $AED$  的面积与长方形  $ABCD$  的面积之比为\_\_\_\_\_.



4. 如图, 一只青蛙开始在正六边形  $ABCDEF$  顶点  $A$  处, 它每次可随意地跳到相邻两个顶点之一. 在  $D$  点处有只飞虫, 若青蛙在 5 次之内跳到  $D$  点, 则可以捕捉到飞虫, 否则飞虫会逃走. 那么青蛙从开始到抓住飞虫, 有\_\_\_\_\_种不同跳法.



5. 若  $E, F$  分别为三角形  $ABC$  中边  $AB, AC$  上的点,  $CE$  和  $BF$  相交于  $P$ . 已知三角形  $EBP$  与三角形  $FPC$  以及四边形  $AEPF$  的面积都是 4, 则三角形  $PBC$  的面积为\_\_\_\_\_.



6. 见右图, 长宽比例为 2:1 的长方形镶有黑色宽边且一端带有 1:1 正方形对角线的图案, 用 8 个这种长方形拼成一个正方形图形, 要求其中 4 个水平放置, 4 个竖直放置. 若一个这样拼成的正方形图



形经过旋转与另一个拼成的正方形图形相同, 则认为两个拼成的正方形图形相同. 那么有对称轴的不同图形有\_\_\_\_\_种.

7. 甲、乙两车分别从 A, B 地同时出发相向而行, 甲车每小时行 40 千米, 乙车每小时行 50 千米. 两车分别到达 B 地和 A 地后, 立即返回, 返回时甲车的速度增加二分之一, 乙车的速度增加五分之一. 已知两车两次相遇处的距离是 50 千米, 则 A, B 两地的距离为\_\_\_\_\_千米.
8. 设  $a, b, c$  是 0-9 中的数字且至少有两个不相等, 将循环小数  $0.\dot{a}b\dot{c}$  化成最简分数后, 分子有\_\_\_\_\_种不同情况.

## 二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 在直线上依次排列有 A, B, C, D 四点. 请你证明:

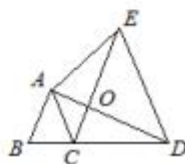
$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD.$$



10. 已知  $f(a) = a^{30} - 4a^{27} + \dots + (31-3n)(-a)^{3n} + \dots - 28a^3 + 31$ , 求  $f(a)$  被  $a^2 - 1$  除的余式.
11. 一个三位数, 将它的三个数字、三个数字两两乘积、三个数字的乘积相加, 其和恰好等于它本身, 这样的三位数中最小的是多少.
12. 将 2613 表示为不少于 5 个非 0 连续自然数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  之和, 即  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2613, n \geq 5$ , 则 第一项 (最小的数)  $a_1$  可以取的最大值与最小值分别是多少?

## 三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 如图所示, 两个等腰三角形  $ABC$  和  $ECD$  的底边在一条直线  $BD$  上,  $AD$  交  $EC$  与  $O$ , 顶角  $\angle BAC = \angle CED$  且它们的腰长分别为 5cm 和 10cm. 若四边形  $ABDE$  的面积为 52.5



$\text{cm}^2$ , 求三角形  $COD$  的面积.

14. 某些不为零的自然数是 2010 个数码和相同的自然数之和, 也是 2012 个数码和相同的自然数之和, 还是 2013 个数码和相同的自然数之和, 求其中最小的那个自然数.

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 B 参考答案

(初一组)

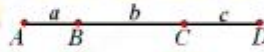
一、填空 (每题 10 分, 共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\pm 16$	61	$\frac{a^2-b^2}{4a^2}$	8	12	24	$\frac{9000}{37}$	660

二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 证明过程:

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD.$$



**证明 1.** 如图, 设  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,

则  $AC = a + b$ ,  $BD = b + c$ ,  $AD = a + b + c$ .

于是  $AB \times CD = a \times c$ ,  $BC \times AD = b \times (a + b + c) = a \times b + b^2 + b \times c$

所以  $AB \times CD + BC \times AD = a \times c + a \times b + b^2 + b \times c$ .

而  $AC \times BD = (a + b)(b + c) = a \times b + b^2 + a \times c + b \times c = a \times c + a \times b + b^2 + b \times c$ .

所以  $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$ .

**证法 2:** 设  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ , 则  $AC = a + b$ ,  $BD = b + c$ ,  $AD = a + b + c$ .

两条线段的乘积可以看成以这两条线段为边的长方形的面积. 有下图所示: