

2016年全国初中数学联合竞赛（初一年级）试题

参考答案及评分标准（C）

一、选择题：（本题满分48分，每小题8分）

1. 定义运算 $a * b = \left(\frac{a^4 + b^4}{a^2 - b}\right)^2 - |a - b|$, 则 $2 * 3 =$ ()

- A. 626 B. 288 C. 168 D. 624

【答案】D。

代入求值得结果624。

2. 已知多项式 $3x^2 - 2(y - x^2 - 1) + mx^2$ 的值与 x 无关, 则 m 的值为 ()

- A. 5 B. 1 C. -1 D. -5

【答案】D。

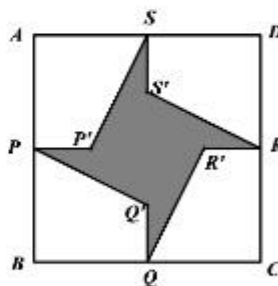
合并同类项得: $3x^2 - 2(y - x^2 - 1) + mx^2 = (5 + m)x^2 - 2y + 2$,

\because 与 x 无关, $\therefore 5 + m = 0$ 。

解得 $m = -5$ 。

3. 如图, 已知正方形边长为2, P, Q, R, S 分别为正方形边上的中点, 点 P', R' 在直线 PR 上, 点 Q', S' 在直线 QS 上, 且 $PP' = QQ' = RR' = SS' = \frac{1}{2}$, 则图中阴影部分的面积为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2



【答案】C。

将阴影部分分成四个直角三角形, 每个直角三角形的两条直角边分别为1和 $\frac{1}{2}$ 。

4. 小明从东面上山西面下山, 已知下山的路程是上山路程的两倍, 上山的速度为 a 千米/小时, 下山的速度为 b 千米/小时, 则小明全程的平均速度为 ()

- A. $\frac{a+b}{2}$ 千米/小时 B. $\frac{a+2b}{3}$ 千米/小时
 C. $\frac{3ab}{a+2b}$ 千米/小时 D. $\frac{3ab}{2a+b}$ 千米/小时

【答案】D。

设上山路程为 s ，则下山路程为 $2s$ ， $\bar{v} = \frac{3s}{\frac{s}{a} + \frac{2s}{b}} = \frac{3ab}{b+2a}$ 。

5. 已知 a, b 为正整数，满足 $ab - 2b - a - 24 = 0$ ，则 $a+b$ 的最大值为 ()

- A. 7 B. 18 C. 29 D. 30

【答案】D。

由 $ab - 2b - a - 24 = 0$ 得 $b = \frac{a+24}{a-2} = 1 + \frac{26}{a-2}$ 。

$\because a, b$ 为正整数， $\therefore a-2 \mid 26$ 。

- ① $a=3, b=27$ ② $a=4, b=14$ ③ $a=15, b=3$ ④ $a=28, b=2$ ，

$\therefore a+b$ 最大为30。

6. 若存在3个互不相同的实数 a, b, c ，使得

$$|1-a| + |1-3a| + |1-4a| = |1-b| + |1-3b| + |1-4b| = |1-c| + |1-3c| + |1-4c| = t,$$

则 $t =$

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

【答案】B

$$|1-a| + |1-3a| + |1-4a| = \begin{cases} 8a-3, a \geq 1 \\ 6a-1, \frac{1}{3} \leq a < 1 \\ 1, \frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3} \\ 3-8a, a < \frac{1}{4} \end{cases}$$

所以， $t=1$ 。

二、填空题（本题满分52分；7-10题每题8分，11-12题每题10分）

7. 已知 a, b 为实数，且关于 x 的方程 $(a-2)x = 1-b$ 有无穷多个解，则 $a+b =$ _____。

【答案】3.

要使方程有无穷多个解 $\begin{cases} a-2=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=3$.

8. 计算

$$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 2013^2 - 2014^2 - 2015^2 + 2016^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】2016.

将计算式依次分组，每4个数一组得： $n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4$,

\therefore 原式=2016.

9. 计算 $\frac{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)}{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】145.

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = [n(n-2) + 2][n(n+2) + 2]$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \frac{(1 \times 3 + 2)(3 \times 5 + 2)(5 \times 7 + 2)(7 \times 9 + 2)(9 \times 11 + 2)(11 \times 13 + 2)}{(1 \times (-1) + 2)(1 \times 3 + 2)(3 \times 5 + 2)(5 \times 7 + 2)(7 \times 9 + 2)(9 \times 11 + 2)} \\ &= \frac{11 \times 13 + 2}{1 \times (-1) + 2} = 145. \end{aligned}$$

或者直接计算得结果。

10. 在整数 8920 前面补上两个正整数 a, b ，得到六位数 $\overline{ab8920}$ ，且该六位数被 3 和 11 整除，则 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】5 或 11 或 17.

$$\because 3 \mid \overline{ab8920}, \therefore 3 \mid a+b+8+9+2+0, \therefore 3 \mid a+b+1.$$

$$\text{又} \because 11 \mid \overline{ab8920}, \therefore 11 \mid (a+8+2) - (b+9+0), \therefore 11 \mid a-b+1.$$

设 $a-b+1=11k$ ， k 为整数。

$\because a, b$ 为不超过 9 的非负整数， $\therefore a-b+1=0$ ，即 $b=a+1$ 。

由 $3 \mid a+b+1$ ， $\therefore 3 \mid 2a+2$ ，即 $3 \mid a+1$ 。

可以取 $\begin{cases} a=2, b=3 \\ a=5, b=6 \\ a=8, b=9 \end{cases}$ $\therefore a+b=5$ 或 11 或 17 。

11. 若 n 为整数, 且 $\sqrt{n^2+9n+30}$ 是自然数, 则 $n=$ _____。

【答案】 -14 或 -7 或 -2 或 5 。

设 $\sqrt{n^2+9n+30}=p$ (p 为非负整数),

$$\text{则 } n^2+9n+30=p^2 \Rightarrow 4n^2+36n+120=4p^2 \Rightarrow (2n+9)^2+39=4p^2$$

$$\Rightarrow 39=(2p+2n+9)(2p-2n-9)$$

$$\begin{cases} 2p+2n+9=1 \\ 2p-2n-9=39 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2p+2n+9=39 \\ 2p-2n-9=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2p+2n+9=3 \\ 2p-2n-9=13 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2p+2n+9=13 \\ 2p-2n-9=3 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} p=10 \\ n=-14 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} p=10 \\ n=5 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} p=4 \\ n=-7 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} p=4 \\ n=-2 \end{cases}$$

$\therefore n=-14$ 或 -7 或 -2 或 5 。

12. 满足 $\begin{cases} 2015 \leq x < 2025 \\ 2015 \leq x+y+z < 2025 \\ 2015 \leq x+2y+4z < 2025 \end{cases}$ 的不同的有序整数组 (x, y, z) 的个数为_____。

【答案】 500 。

$$1^\circ x=2015, 0 \leq y+z \leq 9, 0 \leq 2y+4z \leq 9,$$

$2y+4z$ 取 $0, 2, 4, 6, 8$; $y+z$ 取 $0, 1, 2, \dots, 9$; 共 50 组。

$$2^\circ x=2016, -1 \leq y+z \leq 8, -1 \leq 2y+4z \leq 8$$

$2y+4z$ 取 $0, 2, 4, 6, 8$; $y+z$ 取 $-1, 0, \dots, 8$; 共 50 组。

同理, $x=2017, 2018, \dots, 2024$, 每种情况, y, z 恒有 50 种, 故共有 500 种。