第二十七届“希望杯”全国数学邀请赛

初三　第2试试题

2016年4月10日　　上午9:00至11:00

一、选择题（每小题4分，共40分.）

1. 多项式 $x^{11}-x^{5}-x^{4}-x^{2}+1$ 除以 $x^{2}-1$，得到的余式是（　　）

(A) 1.　(B) -1.　(C) $x-1$.　(D) $x+1$.

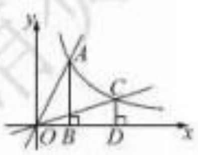


图1

2. 如图1，正比例函数 $y=3x$ 和 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象分别交于 A 点和 C 点，若 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 的面积分别是 S_1 和 S_2，则 S_1 与 S_2 的大小关系是（　　）

(A) $S_1=\frac{1}{3}S_2$.　(B) $S_1=S_2$.　(C) $S_1=\frac{3}{2}S_2$.　(D) $S_1=3S_2$.

3. 若 $\sqrt{2-x}+\sqrt{3-y}=x+y-5$，则 x^{y} 的值是（　　）

(A) 1.　(B) 8.　(C) 64.　(D) 1024.

4. 某零件是由1个长方体中间挖掉1个圆柱体制成的，这个零件的三视图如图2所示，则该零件的体积是（　　）

(A) $18-2\pi$.　(B) $18+2\pi$.

(C) $32-2\pi$.　(D) $32+2\pi$.

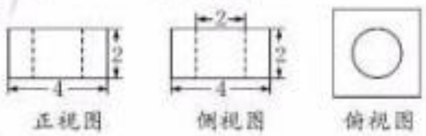


图2

5. 函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{6-x}+x}$ 的自变量 x 的取值范围是（　　）

(A) $2<x\leqslant 6$.　(B) $x\geqslant 6$.　(C) $1\leqslant x\leqslant 6$.　(D) $-1\leqslant x\leqslant 6$.

6. 设正方形 $ABCD$ 的中心为点 O，在以点 A，B，C，D，O 为顶点构成的所有三角形中任意取出两个，它们的面积相等的概率是（　　）

(A) $\frac{3}{14}$.　(B) $\frac{3}{7}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{4}{7}$.

7. 已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若 $[4x+2]=3x-5$，则满足条件的 x 的个数是（　　）

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5.

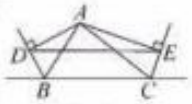


Fig. 3

8. As shown in the Fig. 3, the perimeter of the acute triangle ABC is l. AE is perpendicular to CE at E, EC bisects the exterior angle of $\angle ACB$, AD is perpendicular to BD at D, BD bisects the exterior angle of $\angle ABC$. If $DE=m$, then the value of $m:l$ is（　　）

(A) $1:2$.　(B) $2:3$.　(C) $2:5$.　(D) $5:8$.

（英汉小词典：perimeter 周长；acute triangle 锐角三角形；perpendicular 垂直；bisect 平分；exterior angle 外角）

9. $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三个角对应的边分别是 a，b，c，若 a，b 满足 $b=\sqrt{\frac{a-2}{5a-3}}-\sqrt{\frac{a-2}{3-5a}}+1$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是（　　）

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(C) 1.　(D) 2.

10. 已知二次函数 $y=(2m-1)x^2-(5m+3)x-3m-5$，若 $-\frac{5}{3}<m<\frac{1}{2}$，则下面关于此函数图象的描述中，正确的是（　　）

(A) 与 x 轴没有交点.　　(B) 与 x 轴只有一个交点.

(C) 与 x 轴有两个交点，且在 y 轴的同一侧.　　(D) 与 x 轴有两个交点，且在 y 轴的左右两侧.

二、填空题（每小题 4 分，共 40 分.）

11. 已知 $x+y=2$，$x^2+y^2=4$，则 $(x-y)^{2016}=$________.

12. 已知两圆外切，两条外公切线互相垂直，若小圆的半径长 $3-2\sqrt{2}$，则大圆的半径长________.

13. The lengths of three sides of triangle are $5\sqrt{2}$, $\sqrt{149}$, and 13, respectively. Then the area of this triangle is________.

14. 如果抛物线 $y=x^2-kx-k-2$ 与 x 轴的交点为 A，B，顶点为 C，那么 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为________.

15. 一张长为 8、宽为 5 的矩形纸片，将纸片按照如图 4 的方式折叠，则图 ④ 中最厚处每层纸片的面积是________.

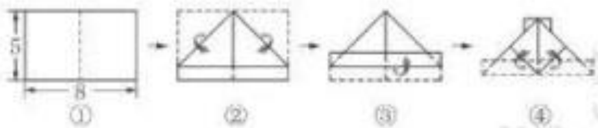


图 4

16. As shown in the Fig. 5, in isosceles triangle ABC, $AB=BC$, BD is perpendicular to AC, AP is perpendicular to BC, AP and BD intersect at Q, if $AQ=2$, $QP=1$, then the area of triangle AQD is________.

（英汉小词典：isosceles triangle 等腰三角形；perpendicular 垂直；intersect 相交）

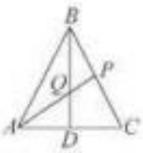


Fig. 5

图 6

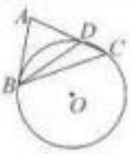


图 7

17. 如图 6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD，DE，EF，FC，BD，BE，BF，BC 的长分别是 1，2，3，4，x，y，z，m，则 $y^2-x^2+m^2-z^2=$________.

18. 若 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=-p$，则 p 的值是________.

19. 如图 7，点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上，$\angle ACB=45^\circ$，$\angle ADB=60^\circ$，AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆 O 的切线，则 $AD:DC=$________.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 是反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 和一次函数 $y=3x-4$ 图象的交点，点 N 在坐标轴上，若 $\triangle MON$ 是等腰三角形，则满足条件的点 N 的个数是________.

三、解答题　每题都要写出推算过程.

21.（本题满分 10 分）已知 a，b 是一元二次方程 $x^2-2016x-1=0$ 的两根，解方程组

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=x-2016,\\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=y+2016.\end{cases}$$

22.（本题满分 15 分）如图 8，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$AC=2$，等边 $\triangle DEF$ 的顶点 D 在 AC 上，E 在 BC 上，F 在 AB 上，作 $CH\perp AB$ 于点 H，交 DF 于点 G.

(1) 求证：点 G 平分 DF；

(2) 当 $AF=\frac{3}{2}$ 时，求 DF 的长；

(3) 求 DF 的最小值.

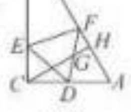


图 8

23.（本题满分 15 分）抛物线 C：$y=-x^2+x-m(m>0)$ 与坐标轴有三个交点，这三点构成一个三角形. 若将 C 向左平移 2 个单位，三角形的面积变为原来的 11 倍，求 m 的值.

第27届"希望杯"全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

初三 第2试

一、选择题（每题4分。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	B	C	D	B	B	A	C	D

二、填空题（每题4分。）

题号	11	12	13	14	15
答案	2^{2016}	1	42.5	1	1
题号	16	17	18	19	20
答案	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	72	2或-1	2:1	8

三、解答题

21 因为 a，b 是一元二次方程 $x^2-2016x-1=0$ 的两根，所以

$$a+b=2016, ab=-1. \qquad (2分)$$

又
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=x+2016 & ① \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=y+2016 & ② \end{cases}$$

①−②，得
$$\frac{1}{a}(x-y)-\frac{1}{b}(x-y)=x-y,$$

即
$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-1\right)(x-y)=0. \qquad (5分)$$

因为
$$\begin{aligned}\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-1&=\frac{b-a}{ab}-1\\&=a-b-1\\&=2016-2b-1\\&=2015-2b\\&\neq 0,\end{aligned}$$

所以 $$x-y=0,$$ （7 分）

代入①式，得 $$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)x=x+2016,$$

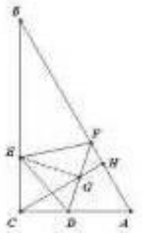
即 $$\frac{a+b}{ab}x=x+2016,$$

$$-2016x=x+2016,$$

所以 $$x=-\frac{2016}{2017},$$ （9 分）

故 (x,y) 为 $\left(-\frac{2016}{2017},\frac{2016}{2017}\right)$. （10 分）

22 证明：（1）连接 EG，如下图所示，



因为 $\angle C=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$CH\perp AB$，

所以 $\angle BCH=60^\circ$. （1 分）

在等边三角形 DEF 中，$\angle EDF=60^\circ$，$\angle BCH=\angle EDF$，

所以 C,D,G,E 共圆. （3 分）

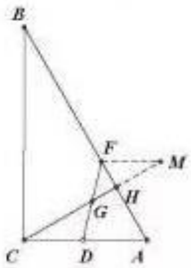
于是 $\angle DEG=\angle DCG=30^\circ$，

所以 $\angle FEG=\angle DEG=30^\circ$，（4 分）

故 G 为 DF 的中点. （5 分）

（2）作 $FM//CA$ 交 CH 的延长线于 M，

所以 $\triangle FMG\cong\triangle DCG$. （6分）



又 $AC=2$，$AF=\dfrac{3}{2}$，得

$$AH=1, FH=\frac{1}{2}, FM=CD=1, AD=1.$$ （8分）

在 ΔADF 中，$AD=1, AF=\dfrac{3}{2}$，$\angle A=60^\circ$，

由余弦定理，得 $$DF^2=1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{3}{2}\cos60^\circ,$$

解得 $$DF=\frac{\sqrt{7}}{2};$$ （10分）

（3）设 $HF=x$，作 $FM//CA$ 交 CH 的延长线于 M，

由 $\Delta FMH \backsim \triangle ACH$，$\Delta FMG \cong \Delta DCG$ 得：

$$\frac{FM}{AC}=\frac{FH}{AH}, FM=DC.$$ （11分）

又因为 $AC=2$，$\angle A=60^\circ$

所以 $AH=1$，$AD=2-2x$. （13分）

在 ΔADF 中，$AD=2-2x$，$AF=1+x$，$\angle A=60^\circ$，

由余弦定理，得

$$DF=\sqrt{7x^2-6x+3}=\sqrt{7(x-\frac{3}{7})^2+\frac{84}{49}}.$$ （14分）

所以 当 $x=\dfrac{3}{7}$，$DF_{\min}=\sqrt{\dfrac{84}{49}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. （15分）

23 设抛物线与 x 轴的两个交点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，$x_1<x_2$，

由根与系数的关系，得

$$x_1+x_2=1, x_1x_2=m.$$ （2分）

由 $\Delta>0$，得 $$m<\frac{1}{4}.$$ （3分）

于是抛物线与 x 轴的两个交点间的距离是

$$x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1-4m}.$$ （5分）

因为 抛物线 C 与 y 轴的交点是 $(0, -m)$，

于是，三角形的面积是 $$\frac{m\sqrt{1-4m}}{2}.$$ （7分）

将 C 向左平移 2 个单位，得到的新抛物线是

$$y=-(x+2)^2+(x+2)-m,$$

即 $$y=-x^2-3x-2-m.$$ （9分）

因为 抛物线向左平移，与 x 轴的两个交点间的距离不变，

所以 平移后抛物线与 x 轴的两个交点间的距离仍是 $\sqrt{1-4m}$. （11分）

又 平移后抛物线与 y 轴的交点是 $(0,\ -2-m)$，

所以，平移后三角形的面积为

$$\frac{(m+2)\sqrt{1-4m}}{2}.$$ （12分）

于是 $$\frac{(m+2)\sqrt{1-4m}}{2}=11\cdot\frac{m\sqrt{1-4m}}{2},$$

即 $$m+2=11m.$$ （14分）

解得 $$m=\frac{1}{5}<\frac{1}{4},$$ 满足题意. （15分）