第二十七届"希望杯"全国数学邀请赛

初二　第2试试题

2016 年 4 月 10 日　　上午 9:00 至 11:00

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分.）

1. 在平面直角坐标系中，点 $A(a-2, a-1)$ 不可能在（　）

(A) 第一象限.　(B) 第二象限.　(C) 第三象限.　(D) 第四象限.

2. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-3m<0, \\ n-2x<0 \end{cases}$ 的解集是 $-1<x<3$，则 $(m+n)^{2016}=$（　）

(A) -1.　(B) 0.　(C) 1.　(D) 2.

3. As shown in Fig. 1, the perimeter of parallel quadrilateral $ABCD$ is 10cm, AC intersects BD at O, and OE is perpendicular to AC at E, then the perimeter of triangle ABE is(　)

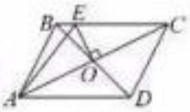


Fig. 1

(A) 2cm.　(B) 3cm.　(C) 4cm.　(D) 5cm.

（英汉小词典：perimeter 周长；parallel quadrilateral 平行四边形；intersect 相交；perpendicular 垂直）

4. $3^{2016}+5$ 除以 $3^{2012}-1$，所得的余数是（　）

(A) $3^{[illegible]}-1$.　(B) $3^{[illegible]}-1$.　(C) 32.　(D) 8.

5. 如图 2，等边 $\triangle ABE$ 的顶点 E 在正方形 $ABCD$ 内，对角线 AC 和线段 BE 交于点 F，若 $BA=\sqrt{1+\sqrt{3}}$，则 $\triangle ABF$ 的面积是（　）

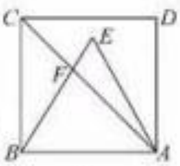


图 2

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.　(C) $4-2\sqrt{3}$.　(D) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(1,1)$，$B(3,2)$，点 C 在坐标轴上，若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，则点 C 的个数是（　）

(A) 3.　(B) 4.　(C) 7.　(D) 8.

7. 一个凸 n 边形，它的每个内角的度数都是整数，且任意两个内角的度数都不相同，则 n 的最大值是（　）

(A) 6.　(B) 26.　(C) 93.　(D) 179.

8. 三条边长都是质数的三角形可能是（　）

① 锐角三角形；② 直角三角形；③ 钝角三角形；④ 等腰三角形；⑤ 等边三角形.

(A) ①②③④.　(B) ②③④⑤.　(C) ①③④⑤.　(D) ①②③④⑤.

9. a 和 b 都是个位数字和十位数字相同的两位数，c 是各位数字都相同的四位数，且 $a^2+b=c$，则 $a+b-c$ 的最大值和最小值的差是（　）

(A) 6732.　(B) 3179.　(C) 6723.　(D) 3187.

10. 如图 3，在等边 $\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$AD=4$，$AE=2$，点 P 从点 E 出发，沿 EB 向点 B 运动，以 PD 为边，在 PD 右侧按如图方式作等边 $\triangle PFD$，当点 P 从点 E 运动到点 B 时，点 F 运动的路径长是（　）

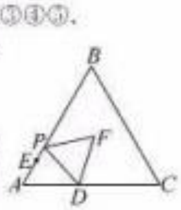


图 3

(A) 8.　(B) 10.　(C) 3π.　(D) 5π.

二、填空题(每小题4分,共40分.)

11. 已知a、b是不超过15的自然数,若关于x的方程$ax=b$的解满足$\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$,则这样的$a$、$b$共有________组.

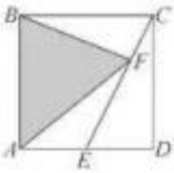


图4

12. 如图4,在正方形$ABCD$中,$AE=ED$,且$EF=2FC$,$\triangle ABF$的面积是5,则正方形$ABCD$的面积是________.

13. 计算:$\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{121\sqrt{119}+119\sqrt{121}}=$________.

14. 若$\begin{cases}|x-y|-|x|=5,\\2|x-y|+3|x|=13,\end{cases}$则$|x|+|y|=$________.

15. 在$\triangle ABC$中,$\angle CAB=120^\circ$,$AB=AC=10\sqrt{3}$cm,动点P从点C出发,沿CB以每秒2cm的速度向B移动,当PA和$\triangle ABC$的腰垂直时,点P移动的时间至少是________秒.

16. 在平面直角坐标系中,已知两点$A(-2,0)$,$B(4,0)$,点$P(m,n)$在一次函数$y=\frac{1}{2}x+2$的图象上,若$\angle APB=90^\circ$,则$|m|=$________.

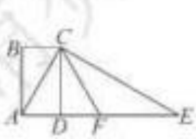


图5

17. 如图5,四边形$ABCD$是长方形,$AC\perp CE$,F是AE的中点,$CF=4$,设$AB=x$,$AD=y$,则$\sqrt{x^2+(y-4)^2}$的值为________.

18. The solution set of $2|x+1|+|x-2|\leqslant 6$ is:________.

图6

19. 如图6,$l_1\parallel l_2\parallel l_3$,且$l_1$和$l_2$间的距离是5,$l_2$和$l_3$间的距离是7,若正方形有三个顶点分别在三条直线上,则此正方形的面积最小是________.

20. 已知$\angle AOB=60^\circ$,点P在$\angle AOB$的内部,P_1是点P关于OA的对称点,P_2是点P关于OB的对称点,若$OP=6$,则$P_1P_2=$________.

三、解答题 每题都要写出推算过程.

21.(本题满分10分)

若自然数x、y满足$x>y$,$x+y=2A$,$xy=G^2$,若A、G都是两位数,且互为反序数,求x、y.(注:数字排列顺序相反的两个数互为反序数,如12和21)

22.(本题满分15分)

如图7,在$\triangle ABC$外分别以AB、AC为边作正方形$ABDE$和正方形$ACFG$,连接EG,AM是$\triangle ABC$中BC边上的中线,延长MA交EG于点H,求证:

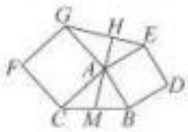


图7

(1)$AM=\frac{1}{2}EG$;

(2)$AH\perp EG$;

(3)$EG^2+BC^2=2(AB^2+AC^2)$.

23.(本题满分15分)

水平桌面上有甲、乙、丙三个圆柱形容器(容器足够高),底面半径之比为1∶2∶1,用两个相同的管子在容器的5cm高处连通(即管子底端离容器底5cm),三个容器中,只有甲中有水,水位高1cm,如图8所示.以相同的速度向乙和丙注水,1分钟后,乙的水位上升$\frac{5}{6}$cm,问:几分钟后,甲与乙的水位高度之差是0.5cm?

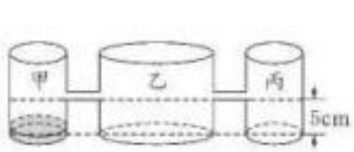


图8

第二十七届“希望杯”全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

初二 第2试

一、选择题（每题4分。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	D	C	A	C	B	C	A	A

二、填空题（每题4分，第14题每答对一个结果得2分。）

题号	11	12	13	14	15
答案	6	12	$\frac{5}{11}$	4或8	5
题号	16	17	18	19	20
答案	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	2	$-2\le x\le 2$	74	$6\sqrt{3}$

三、解答题

21.令$A=10a+b$，则$G=10b+a$，其中a和b都是1到9的自然数，则

$$x+y=20a+2b,$$

$$xy=(10b+a)^2=100b^2+20ab+a^2,$$

所以 $$(x+y)^2=(20a+2b)^2=400a^2+80ab+4b^2,$$

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=(400a^2+80ab+4b^2)-4(100b^2+20ab+a^2)$$
$$=396a^2-396b^2$$
$$=2^2\times3^2\times11(a+b)(a-b),$$ （2分）

因为x，y都是自然数，所以$(x-y)^2$是完全平方数，

所以$(a+b)$和$(a-b)$中必有一个是11的倍数，

结合a和b都是1到9的自然数，可知 $a+b=11$，

于是$(a-b)$也是一个完全平方数，

只能是 $$a=6,\ b=5.$$ （5分）

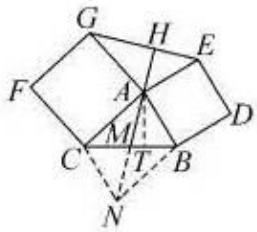
所以 $$(x-y)^2=(2\times3\times11)^2,$$

即 $$x-y=66,$$

$$x+y=20a+2b=130,$$ （8分）

可得 $$x=98,\ y=32。$$ （10分）

22. （1）延长 AM 到点 N，使 $MN=MA$，连接 BN。



易证 $\triangle NBM\cong\triangle ACM$，

可得 $\angle BNM=\angle CAM$，

所以 $BN/\!/AC$，

于是 $\angle NBA+\angle BAC=180°$。

因为 $\angle GAE+\angle BAC=360°-90°-90°=180°$，

所以 $\angle NBA=\angle GAE$。 （3分）

在$\triangle NBA$ 和$\triangle GAE$ 中，

$NB=CA=GA$, $\angle NBA=\angle GAE$, $BA=EA$,

所以 $\triangle NBA\cong\triangle GAE$，

故 $AN=EG$，

即 $AM=\frac{1}{2}EG$。 （5分）

（2）由（1）$\triangle NBA\cong\triangle GAE$，得$\angle BAN=\angle AEG$。 （7分）

因为 $\angle HAE+\angle BAN=180°-90°=90°$，

所以 $\angle HAE+\angle AEH=90°$，

故 $\angle AHE=90°$，

即 $AH\perp EG$. （10分）

（3）作 $AT\perp BC$ 于 T，则 $BM=BT+TM, CM=CT-TM$，

在 Rt$\triangle ABT$ 中， $AB^2=BT^2+AT^2$，

在 Rt$\triangle ACT$ 中， $AC^2=CT^2+AT^2$，

在 Rt$\triangle ATM$ 中， $AT^2=AM^2-TM^2$，

$$\begin{aligned}AB^2&=BT^2+AM^2-TM^2\\&=AM^2+BT^2-TM^2\\&=AM^2+(BT+TM)(BT-TM)\\&=AM^2+BM(BT-TM),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC^2&=CT^2+AM^2-TM^2\\&=AM^2+CT^2-TM^2\\&=AM^2+(CT+TM)(CT-TM)\\&=AM^2+CM(CT+TM),\end{aligned}$$

二式相加，得 $AB^2+AC^2=2AM^2+BM(BT-TM)+CM(CT+TM)$

因为 $$BM = CM\ ,$$

所以 $$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BM(BT - TM + CT + TM)$$

$$= 2AM^2 + BM(BT + CT) = 2AM^2 + BM \times BC$$

由（1） $$AM = \frac{1}{2}EG\ ,$$

又 $$BM = \frac{1}{2}BC\ ,$$

所以 $$AB^2 + AC^2 = 2(\frac{1}{2}EG)^2 + \frac{1}{2}BC \times BC = \frac{1}{2}(EG^2 + BC^2)$$ （15分）

23.设 t min 后，甲与乙的水位高度之差是 0.5 cm．

①当乙的水位低于甲的水位时，则

$$1 - \frac{5}{6}t = 0.5\ ,$$

解得 $$t = \frac{3}{5}\ (\text{min})\ ;$$ （5分）

②当甲的水位低于乙的水位，且甲的水位不变时，则

$$\frac{5}{6}t - 1 = 0.5\ ,$$

解得 $$t = \frac{9}{5}\ ,$$

但 $$\frac{10}{3} \times \frac{9}{5} = 6 > 5\ ,$$

说明此时丙容器已向乙容器溢水了．

因为 $$5 \div \frac{10}{3} = \frac{3}{2}\ (\text{min})\ ,$$

而 $$\frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}\ (\text{cm})\ ,$$

即经过了 $\frac{3}{2}$ (min)，丙容器的水位达到了管子底部，此时乙的水位上升了 $\frac{5}{4}$ (cm)，但甲的水位暂时不变，所以由

$$\frac{5}{4} + 2 \times \frac{5}{6}\left(t - \frac{3}{2}\right) - 1 = 0.5\ ,$$

解得 $$t = \frac{33}{20}\ (\text{min})\ ;$$ （10分）

③当甲的水位低于乙的水位，但乙的水位已到达或超过管子底部，使甲的水位上升时，因为乙的水位达到管子底部的时间为

$$\frac{3}{2}+\left(5-\frac{5}{4}\right)\div\frac{5}{6}\div2=\frac{15}{4}\ (\mathrm{min}),$$

所以有
$$5-1-2\times\frac{10}{3}\left(t-\frac{15}{4}\right)=0.5,$$

解得
$$t=\frac{171}{40}\ (\mathrm{min}).$$

综上所述，$\frac{3}{5}$ min，$\frac{33}{20}$ min，$\frac{171}{40}$ min后，甲与乙的水位高度之差为0.5 cm．（15分）