

第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛



初二 第1试

2012年3月11日 上午8:30至10:00 得分_____

未经“希望杯”组委会授权,任何单位和个人均不准翻印或销售此试卷,也不准以任何形式(包括网络)转载。

一、选择题(每小题4分,共40分。)以下每题的四个选项中,仅有一个是正确的,请将正确答案前的英文字母写在下面的表格内。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	共得分
答案											

1. 如果 $0 < m < 1$, 那么 m 一定小于它的()
 (A) 相反数. (B) 倒数. (C) 绝对值. (D) 平方.

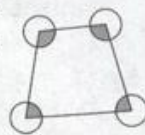
2. 在 $2^{27}, 3^{25}, 5^{24}, 6^{33}$ 这四个数中, 最大的数是()
 (A) 2^{27} . (B) 3^{25} . (C) 5^{24} . (D) 6^{33} .

3. 若 $a + b = 2012, b \neq a + 1$, 则 $\frac{a^2 - b^2 + 2b - 1}{a^2 - b^2 + a + b}$ 的值等于()
 (A) 2012. (B) 2011. (C) $\frac{2012}{2011}$. (D) $\frac{2011}{2012}$.

4. 方程 $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{3}$ ()
 (A) 只有一个根 $x = 1$. (B) 只有一个根 $x = 2$.
 (C) 有两个根 $x_1 = 1, x_2 = 2$. (D) 无解.

5. 方程组 $\begin{cases} x + y + z = 10, \\ 3x + y - z = 50, \\ 2x + y = 40 \end{cases}$ ()
 (A) 无解. (B) 有1组解. (C) 有2组解. (D) 有无穷多组解.

6. As in the figure 1, there are four circles with radius of 2. The four circles are apart from each other. Link their centers to form a quadrilateral, then the total area of the shaded parts in the figure is()



(A) 2π . (B) 4π .
 (C) 6π . (D) 8π .

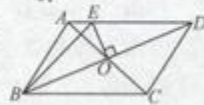
7. 在平面直角坐标系中, 先将直线 $y = 3x - 2$ 关于 x 轴作轴对称变换, 再将所得直线关于 y 轴作轴对称变换, 则经两次变换后所得直线的表达式是()

(A) $y = 2x - 3$. (B) $y = 3x - 2$. (C) $y = 2x + 3$. (D) $y = 3x + 2$.

8. 一次函数 $y = (m^2 - 4)x + (1 - m)$ 和 $y = (m + 2)x + (m^2 - 3)$ 的图象分别与 y 轴交于点 P 和 Q , 这两点关于 x 轴对称, 则 m 的值是()

(A) 2. (B) 2 或 -1. (C) 1 或 -1. (D) -1.

9. 如图2, 在周长是10cm的 $\square ABCD$ 中, $AB \neq AD$, AC, BD 相交于点 O , 点 E 在 AD 边上, 且 $OE \perp BD$, 则 $\triangle ABE$ 的周长是()



(A) 2cm. (B) 3cm.
 (C) 4cm. (D) 5cm.

图2

10. x_1, x_2, \dots, x_{100} 是自然数, 且 $x_1 < x_2 < \dots < x_{100}$, 若 $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 7001$, 那么, $x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$ 的最大值是()

- (A) 2225. (B) 2226. (C) 2227. (D) 2228.

二、A 组填空题(每小题 4 分, 共 40 分.)

11. 有下列命题:

- ① 矩形既是中心对称图形, 又是轴对称图形;
 ② 平行四边形是中心对称图形, 不是轴对称图形;
 ③ 等腰梯形是轴对称图形, 不是中心对称图形;
 ④ 有一个锐角是 30° 的直角三角形不是中心对称图形, 也不是轴对称图形.

其中正确命题的序号是_____. (把所有正确的命题的序号都填上)

12. 若 n 是正整数, 且 $x^{2n} = 5$, 则 $(2x^{2n})^2 \div (4x^{2n}) =$ _____.

13. 已知整数 a, b 满足 $6ab = 9a - 10b + 16$, 则 $a + b$ 的值是_____.

14. The original railway from A to B is 310 km, and now a 280 km long high-speed railway is built. The train speed on the high-speed railway is twice the original speed, so the traveling time from A to B is 2 hours shorter. Then the original train speed on the original railway is _____ km/hour.

15. 如图 3, 已知 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $\angle C = 20^\circ$, $AB + BD = AC$, 则 $\angle B$ 的度数是_____.

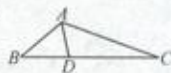


图 3

16. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $3\angle A > 5\angle B$, $3\angle C < 2\angle B$, 则 $\triangle ABC$ 必是_____三角形. (填“锐角”、“直角”或“钝角”)

17. 若关于 x 的分式方程 $\frac{mx-1}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 2$ 有整数解, m 的值是_____.

18. 已知 $a + x^2 = 2011$, $b + x^2 = 2012$, $c + x^2 = 2013$, 且 $abc = 24$, 则

$$\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

19. 若 x 是自然数, $x + 13$ 和 $x - 76$ 都是完全平方数, 那么 $x =$ _____.

20. 如图 4, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点, 点 P 在线段 GF 上, 则 $\triangle PHE$ 与 $\square ABCD$ 的面积比值是_____.

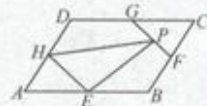


图 4

三、B 组填空题(每小题 8 分, 共 40 分.)

21. 直线 $y = 3x + k + 2$ 与直线 $y = -x + 2k$ 的交点在第二象限, 且 k 是正整数, 则 k 的值是_____; 交点的坐标是_____.

22. 一个三角形的三条边的长分别是 5, 7, 10, 另一个三角形的三条边的长分别是 5, $3x - 2$, $2y + 1$, 若这两个三角形全等, 则 $x + y$ 的值是_____或_____.

23. 点 A 和 B 在直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 上, 点 A 的横坐标是 2, 且 $AB = 5$. 当线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 后, 点 B 的坐标是_____或_____.

24. 等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 和 E 在 AB 边上, $AD = 3$, $BE = 4$, $\angle DCE = 45^\circ$, 则 $DE =$ _____或_____.

25. 袋中有红、黄、黑三种颜色的球各若干个, 黄色球上标有数字 5, 黑色球上标有数字 6, 红色球上标的数字看不清. 现从袋中拿出 8 个球, 其中黄色球和黑色球的个数分别少于红色球的个数. 已知 8 个球上的数字和是 39, 那么红色球上标的数字是_____; 拿出黑色球的个数是_____.

2012年“希望杯”初赛试题答案及详解（初二）

(1) 选择题

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	D	B	A
题号	6	7	8	9	10
答案	B	D	D	D	B

(2) A组填空题

题号	11	12	13	14	15
答案	①②③④	25	-1	85	40°
题号	16	17	18	19	20
答案	钝角	4 或 3 或 0	$\frac{1}{8}$	2012	$\frac{1}{4}$

(3) B组填空题

题号	21	22	23	24	25
答案	$1; \left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$	$7; \frac{15}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right); \left(5, \frac{17}{2}\right)$	$5; 7 - 2\sqrt{6}$	4; 3

(1) 第 1-10 题: 答对得 4 分; 答错或不答, 得 0 分

(2) 第 11-20 题: 答对得 4 分; 答错或不答, 得 0 分

(3) 第 21-25 题: 答对得 8 分, 每空 4 分; 答错或不答, 得 0 分

初二年级试题详解

1、答案 B

【解析】 $Q 0 < m < 1, \therefore \frac{1}{m} > 1$ 即 $m < \frac{1}{m}$

2、答案 C

$$2^{77} = (2^7)^{11} = 128^{11}$$

【解析】 $3^{55} = (3^5)^{11} = 243^{11}$
 $5^{44} = (5^4)^{11} = 625^{11}, \therefore 5^{44} > 3^{55} > 6^{33} > 2^{77}, 5^{44}$ 最大

$$6^{33} = (6^3)^{11} = 216^{11}$$

3、答案 D

【解析】

$$\frac{a^2 - b^2 + 2b - 1}{a^2 - b^2 + a + b} = \frac{a^2 - (b-1)^2}{(a+b)(a-b) + (a+b)} = \frac{(a+b-1)(a-b+1)}{(a+b)(a-b+1)} = \frac{a+b-1}{a+b} = \frac{2011}{2012}$$

4、答案 B

【解析】 $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{3}$

$Q x \neq 1 \therefore \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$ 即 $x+1=3, x=2$

5、答案 A

$$\begin{cases} x+y+z=10 & \textcircled{1} \\ 3x+y-z=50 & \textcircled{2} \\ 2x+y=40 & \textcircled{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1}+\textcircled{2} \text{ 得 } 4x+2y=60. \text{ 与 } \textcircled{3} \text{ 矛盾} \\ \therefore \text{无解} \end{array}$$

6、答案 B

【解析】四边形内角和为 360° ， \therefore 阴影面积刚好与一个圆面积相等

$$S_{\text{圆}} = \pi r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

7、答案 D

【解析】 $y = 3x - 2$ 关于 x 轴做轴对称即 $-y = 3x - 2$

$-y = 3x - 2$ 关于 y 轴作轴对称即 $-y = -3x - 2$ ，化简得 $y = 3x + 2$

8、答案 D

【解析】 $P(0, 1-m), Q(0, m^2-3)$

Q, P 关于 x 轴对称 $\therefore 1-m+m^2-3=0, m^2-m-2=0$

$$(m-2)(m+1)=0, m=2 \text{ 或 } m=-1$$

当 $m=2$ 时， $m^2-4=0$ 第一个函数变为 $y=-1$ ，不是一次函数

与题目不符，舍去 $\therefore m=-1$

9、答案 D

【解析】 $QE \perp BD$ 且 $BO = OD$ 即 EO 是 BD 的中垂线

$$\therefore BE = OE$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的周长} = AB + AE + BE = AB + AE + DE = AB + AD = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$$

10、答案 B

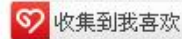
【解析】设 $x_1^1, x_2^1, \dots, x_{100}^1$ 是连续自然数则 $S_{100}^1 = 100x_1^1 + \frac{100 \times 99}{2} = 100x_1^1 + 4950$

当 $x_1^1 = 20$ 时, $S_{100}^1 = 6950 = 7001 - 51$

\therefore 为了保证 $x_1 + x_2 + \dots + x_{50}$ 最大

依次将 $x_{50}^1, x_{51}^1, \dots, x_{100}^1$ 加 1, 作为 $x_{50}, x_{51}, \dots, x_{100}$.

$x_1^1, x_2^1, \dots, x_{49}^1$ 作为 x_1, x_2, \dots, x_{49} 时 $x_1 + x_2 + \dots + x_{50}$ 最大



$$\begin{aligned} S &= 20 \times 50 + \frac{50 \times 49}{2} + 1 \\ &= 1000 + 1226 \\ &= 2226. \end{aligned}$$

11、答案 ①②③④

12、答案 25

【解析】 $(2x^{3n})^2 \div (4x^{2n}) = 4x^{6n} \div 4x^{2n} = x^{4n} = (x^{2n})^2 = 25$.

13、答案 -1

【解析】 $6ab = 9a - 10b + 16$

$$6ab - 9a + 10b - 15 = 1$$

$$(3a+5)(2b-3) = 1$$

$$\begin{cases} 3a+5=1 \\ 2b-3=1 \end{cases} \text{无整数解, 舍.} \quad \begin{cases} 3a+5=-1 \\ 2b-3=-1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

14、答案 85

【解析】 $\frac{310}{v} - \frac{280}{2v} = 2, \quad \frac{170}{v} = 2, \quad v = 85 \text{ km/h.}$

14、答案 85

【解析】 $\frac{310}{v} - \frac{280}{2v} = 2, \quad \frac{170}{v} = 2, \quad v = 85 \text{ km/h}$

15、答案 40°

【解析】 $\because AD$ 为 $\angle BAC$ 角平分线, 在 AC 上截 $AE=AB$, 连接 DE 则 $\triangle BAD \cong \triangle EAD$.

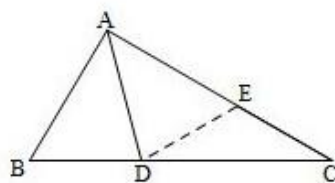
$$\therefore BD = DE.$$

$$AB + BD = AE + DE = AC$$

$$\therefore DE = EC$$

$$\therefore \angle AED = 2\angle C = 40^\circ$$

$$\angle B = \angle AED = 40^\circ.$$



16、答案 钝角

【解析】 $3\angle A > 5\angle B \quad 3\angle C < 2\angle B$

$$\therefore 15\angle C < 10\angle B < 6\angle A$$

$$10\angle B < 6\angle A$$

$$10\angle C < 4\angle A$$

$$\therefore 10\angle B + 10\angle C < 10\angle A \quad \text{即 } \angle A > 90^\circ$$

$\therefore \triangle ABC$ 为钝角

17、答案 0, 3, 4

【解析】 $\frac{mx-1}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 2, \quad \frac{mx-2}{x-2} = 2.$

$$mx-2 = 2x-4 (x \neq 2)$$

$$(2-m)x = 2$$

$$2-m = \pm 1, \pm 2.$$

$$Q x \neq 2 \quad \therefore 2-m \neq 1$$

$$2-m = -1, \pm 2.$$

$$m = 0, 3, 4.$$

18、答案 $\frac{1}{8}$

【解析】 $Qc - b = 1$

$$b - a = 1$$

$$\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac}{abc}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-c)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2}{abc}$$

19、答案 2012

【解析】 设 $x + 13 = a^2$ $x - 76 = b^2$ $a^2 - b^2 = 89$ 即 $(a+b)(a-b) = 89$

$$\begin{cases} a+b=89 \\ a-b=1 \end{cases} \text{ 解 } \begin{cases} a=45 \\ b=44 \end{cases}$$

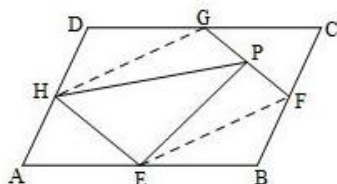
$$x = 45^2 - 13 = 2025 - 13 = 2012.$$

20、答案 1: 4

【解析】 连结 HG, EF .

$$S_{\triangle PHE} = \frac{1}{2} S_{Y_{HEFG}} = \frac{1}{4} S_{Y_{ABCD}}$$

$$\therefore S_{\triangle PHE} : S_{Y_{ABCD}} = 1:4$$



21、答案 $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$

$$\begin{cases} y = 3x + k + 2 \\ y = -x + 2k \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + k + 2 = -x + 2k \\ x = \frac{k-2}{4} \end{cases} \quad y = \frac{2-k}{4} + 2k = \frac{7k+2}{4}$$

【解析】 $\frac{k-2}{4} < 0$, $\frac{7k+2}{4} > 0$. 且 k 为正整数

$$\therefore k=1 \text{ 代入得 } x = -\frac{1}{4} \quad y = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \text{交点坐标为 } (-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}).$$

22、答案 7 或 7.5

【解析】 $\begin{cases} 3x-2=7 \\ 2y+1=10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x-2=10 \\ 2y+1=7 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=4.5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

$$x+y = 7 \text{ 或 } 7.5.$$

23、答案 $(-1, \frac{1}{2})$ 或 $(5, \frac{17}{2})$

【解析】 $A(2, \frac{9}{2})$ 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 绕 A 顺时针旋转 90° 后

斜率为 $\frac{4}{3}$. 且经过点 A.

$$\therefore \text{直线为 } y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$$

$\therefore AB$ 距离为 5. 即横坐标相差 3.

$$\therefore B \text{ 坐标为 } (-1, \frac{1}{2}) \text{ 或 } (5, \frac{17}{2})$$

24、答案 5 或 $7-2\sqrt{6}$

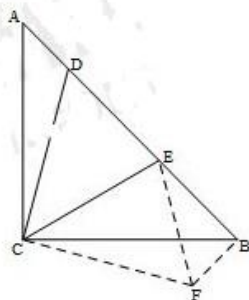
【解析】 分情况讨论

① D 比 E 更靠近 A 点

作 $BF \perp AB$ 且 $BF = AD = 3$.

连结 CF 则 $\triangle BCF \cong \triangle ACD$.

连结 EF



$$EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = 5.$$

$$\angle DCE = \angle FCE = 45^\circ$$

$$CF = CD \quad CE = CE$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle DCE$$

$$DE = EF = 5.$$

② E 比 D 更靠近 A 点

与前一种情况除了 D 、 E 调换外情况相同

设 $AE = a$. $DE = 3 - a$ $BD = a + 1$

$$DF^2 = BD^2 + BF^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 = 2a^2 + 2a + 1$$

$$DE^2 = DF^2$$

$$2a^2 + 2a + 1 = a^2 - 6a + 9$$

$$a^2 + 8a - 8 = 0$$

$$a = -4 \pm 2\sqrt{6} \quad \text{其中 } -4 - 2\sqrt{6} \text{ 为负, 舍.}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{6} - 4$$

$$3 - a = 7 - 2\sqrt{6}.$$

25、答案 4; 3

【解析】 黄色球和黑色球个数分别少于红色球个数

若红色球数 ≤ 3 则总球数 $\leq 2 + 2 + 3 = 7$. 不合题意.

\therefore 红色球数 ≥ 4

$39 \div 8 < 5 \quad \therefore$ 红色上数字小于 5.

若数字 ≤ 3 . 则数字和 $\leq 3 \times 4 + 3 \times 6 + 5 = 35$ (舍)

\therefore 数字为 4 $\quad \because 5 \times 8 - 39 = 1 \quad \therefore$ 红球比黑球多 1 个

\therefore 红球 4 个. 黑球 3 个. 黄球 1 个.