

第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛



初一 第1试

2012年3月11日 上午8:30至10:00 得分_____

未经“希望杯”组委会授权,任何单位和个人均不准翻印或销售此试卷,也不准以任何形式(包括网络)转载。

一、选择题(每小题4分,共40分。)以下每题的四个选项中,仅有一个是正确的,请将正确答案前的英文字母写在下面的表格内。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	共得分
答案											

1. 计算: $1 + (-2)^2 - \frac{-4 \times (-1)^2}{4} = ()$

- (A) -2. (B) -1. (C) 6. (D) 4.

2. 北京景山公园中的景山的相对高度(即从北京的地平面到山顶的垂直距离)是45.7米,海拔高度是94.2米。而北京香山公园中的香炉峰(俗称“鬼见愁”)的海拔高度是557米,则香炉峰的相对高度是()米。

- (A) 508.5. (B) 511.3. (C) 462.8. (D) 605.5.

3. If rational numbers $a, b,$ and c satisfy $a < b < c,$ then $|a - b| + |b - c| + |c - a| = ()$

- (A) 0. (B) $2c - 2a.$ (C) $2c - 2b.$ (D) $2b - 2a.$

4. 某人在练车场上练习驾驶汽车,两次拐弯后的行驶方向与原来的方向相反,则这两次拐弯的角度可能是()

- (A) 第一次向左拐 $40^\circ,$ 第二次向右拐 $40^\circ.$
 (B) 第一次向右拐 $50^\circ,$ 第二次向左拐 $130^\circ.$
 (C) 第一次向右拐 $70^\circ,$ 第二次向左拐 $110^\circ.$
 (D) 第一次向左拐 $70^\circ,$ 第二次向左拐 $110^\circ.$

5. 某单位3月上旬中的1日至6日每天用水量的变化情况如图1所示,那么这6天的平均用水量是()吨。

- (A) 33. (B) 32.5.
 (C) 32. (D) 31.

6. 若两位数 ab 是质数,交换数字后得到的两位数 ba 也是质数,则称 ab 为绝对质数。在大于11的两位数中绝对质数有()个。

- (A) 8. (B) 9.
 (C) 10. (D) 11.

7. 已知有理数 x 满足方程 $\frac{1}{2012 - \frac{x}{x-1}} = \frac{1}{2012},$ 则 $\frac{x^4 - 2009}{x^3 + 49} = ()$

- (A) -41. (B) -49. (C) 41. (D) 49.

8. 某研究所全体员工的月平均工资为5500元,男员工月平均工资为6500元,女员工月平均工资为5000元,则该研究所男、女员工人数之比是()

- (A) 2 : 3. (B) 3 : 2. (C) 1 : 2. (D) 2 : 1.

9. 如图2, $\triangle ABC$ 的面积是60, $AD : DC = 1 : 3, BE : ED = 4 : 1, EF : FC = 4 : 5.$ 则 $\triangle BEF$ 的面积是()

- (A) 15. (B) 16. (C) 20. (D) 36.

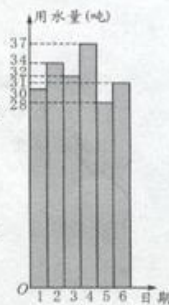


图1

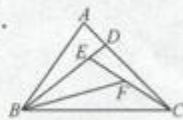


图2

10. 从3枚面值3元的硬币和5枚面值5元的硬币中任意取出1枚或多于1枚,可以得到 n 种不同的面值和,则 n 的值是()

- (A) 8. (B) 15. (C) 23. (D) 26.

二、A 组填空题(每小题4分,共40分.)

11. 若 $x = 0.23$ 是方程 $mx + \frac{1}{5} = 0.12$ 的解,则 $m =$ _____.

12. 如图3,梯形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = \angle CDA = 90^\circ$, $AB = 5$, $CD = 2$, $AD = 4$. 以梯形各边为边分别向梯形外作四个正方形. 记梯形 $ABCD$ 的面积为 S_1 , 四个

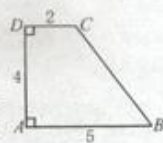


图3

正方形的面积和为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} =$ _____.

13. 若有理数 a 的绝对值的相反数的平方的倒数等于它的相反数的立方的 $\frac{1}{32}$, 则 $a =$ _____.

14. If $a < -2$, $-1 < b < 0$, $H = -a - b$, $O = a^2 + b^2$, $P = -a + b^2$, and $E = a^2 - b$, then the magnitude relation of the four number H , O , P , and E is _____.

(英汉小词典: magnitude relation 大小关系)

15. 某农民在农贸市场卖鸡. 甲先买了总数的一半又半只, 然后乙买了剩下的一半又半只, 最后丙买了剩下的一半又半只, 恰好买完. 则该农民一共卖了 _____ 只鸡.

16. 若 $(a - 2b + 3c + 4)^2 + (2a - 3b + 4c - 5)^2 \leq 0$, 则 $6a - 10b + 14c - 3 =$ _____.

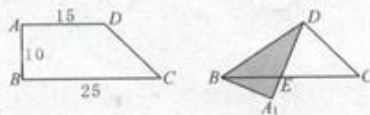


图4

17. 如图4, 在直角梯形纸片 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AB = 10$, $BC = 25$, $AD = 15$. 现以 BD 为折痕, 将梯形 $ABCD$ 折叠, 使 AD 交 BC 于点 E , 点 A 落到点 A_1 , 则 $\triangle CDE$ 的面积是 _____.

18. 代数式 $5a^2 + 5b^2 - 4ab - 32a - 4b + 10$ 的最小值是 _____.

19. 如图5, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1\text{cm}$, $AB = 2\text{cm}$. 以 B 为中心, 将 $\triangle ABC$ 顺时针旋转, 使得点 A 落在边 CB 延长线上的 A_1 点, 此时点 C 落到点 C_1 . 则在旋转中, 边 AC 变到 A_1C_1 所扫过的面积为 _____ cm^2 (结果保留 π).

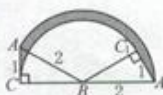


图5

20. 在一条笔直的公路上, 某一时刻, 有一辆客车在前, 一辆小轿车在后, 一辆货车在客车与小轿车的正中间同向行驶. 过了10分钟, 小轿车追上了货车; 又过了5分钟, 小轿车追上了客车; 此后, 再过 t 分钟, 货车追上了客车, 则 $t =$ _____.

三、B 组填空题(每小题8分,共40分.)

21. 已知 $2x - 3y = z + 56$, $6y = 91 - 4z - x$, 则 x, y, z 的平均数是 _____, 又知 $x > 0$ 并且 $(x - 3)^2 = 36$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____.

22. 有长为 $1\text{cm}, 2\text{cm}, 3\text{cm}, 4\text{cm}, 5\text{cm}, 6\text{cm}$ 的六根细木条, 以它们为边(不准截断或连接)可以构成 _____ 个不同的三角形, 其中直角三角形有 _____ 个.

23. 已知11瓦(0.011千瓦)的节能灯与60瓦(即0.06千瓦)的白炽灯的照明效果相同, 使用寿命都超过3000小时. 而节能灯每只售价为27元, 白炽灯每只售价为2.5元, 电费为0.5元/千瓦时. 若用一只11瓦节能灯照明1500小时, 则电费为 _____ 元. 对于11瓦的节能灯和60瓦的白炽灯, 当照明时间大于 _____ 小时, 买节能灯更划算.

24. 已知正整数 a, b 的最大公约数是3, 最小公倍数是60, 若 $a > b$, 则 $\frac{a^2 - b^2}{2ab} =$ _____.

25. 如图6, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, M 是 $\angle CAB$ 的平分线 AL 的中点. 延长 CM 交 AB 于 K , $BK = BC$. 则 $\angle CAB =$ _____, $\frac{\angle ACK}{\angle KCB} =$ _____.

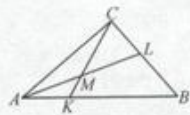


图6

(1) 选择题

题号	1	2	3	4	5
答案	C	A	B	D	C
题号	6	7	8	9	10
答案	A	A	C	B	C

(2) A 组填空题

题号	11	12	13	14	15
答案	$-\frac{8}{23}$	$\frac{1}{5}$	-2	$P < H < O < E$	7
题号	16	17	18	19	20
答案	-1	$70\frac{5}{6}$	-58	$\frac{5\pi}{12}$	15

(3) B 组填空题

题号	21	22	23	24	25
答案	$\frac{49}{3}; 9; -39; 79$	7; 1	8.25; 1000	$\frac{399}{40}$ 或 $\frac{9}{40}$	$45; \frac{1}{3}$

初一年级试题详解

1、原式 $=1+4-\frac{-4\times 1}{4}=6$

2、 $557-(94.2-45.7)=508.5$

3、因为 $a < b < c$ ，所以 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=b-a+c-b+c-a=2c-2a$

4、两次拐弯后应拐 180° ，D 符合

5、 $(30+34+32+37+28+31)\div 6=32$

6、绝对质数只能由 1、3、7、9 组成。

13、31、17、71、37、73、79、97 一共 8 个

7、 $\frac{1}{2012-\frac{x}{x-1}}=\frac{1}{2012}$ ，得出 $x=0$ ，所以 $\frac{x^4-2009}{x^9+49}=-41$

8、设男员工人数为 a ，女员工人数为 b ，列方程：

$$\frac{6500a + 5000b}{a + b} = 5500$$

得 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

9、 $\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{EF}{EC} = \frac{4}{9}$ ， $\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{BE}{BD} = \frac{4}{5}$ ， $\frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DC}{AC} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{15}$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = 60 \times \frac{4}{15} = 16$$



10、 3元硬币可取0枚、1枚、2枚、3枚共4种取法

5元硬币可取0枚、1枚、2枚、3枚、4枚、5枚共6种取法

但，3元和5元不能同时取0枚，共 $4 \times 6 - 1 = 23$ 种取法，即23种面积。

11、 $0.23m + \frac{1}{5} = 0.12$ ，得出 $m = -\frac{8}{23}$ 。

12、 勾股定理： $bc = (AB - CD)^2 + AD^2 = 25$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times (2 + 5) = 14, S_2 = 2^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 = 70,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{5}$$

13、 $\frac{1}{(-|a|)^2} = \frac{1}{32}(-a)^3$ ，即 $\frac{1}{a^2} = -\frac{a^3}{32}$ ， $a^5 = -32$ ，

$$\therefore a = -2$$

14、 因为 $a^2 > |a|$, $|b| > b^2$,

$$E - O = a^2 - b - a^2 - b^2 = -b^2 - b > 0$$

$$O - H = a^2 + b^2 + a + b$$

$$a^2 - |a| > 2 > |b| - b^2$$

$$\therefore a^2 + a + b^2 + b = a^2 - |a| - (|b| - b^2) > 0$$

$$H - P = -a - b + a - b^2 = -b - b^2 = |b| - b^2 > 0$$

所以 $E > O > H > P$

本题也可用特殊值法

15、 逆推, 最后剩下的一半为半只, 所以丙买时只有 $0.5 \times 2 = 1$ 只,

乙买时有 $(1 + 0.5) \times 2 = 3$ 只, 甲买时有 $(3 + 0.5) \times 2 = 7$ 只。

16、 由题意: $a - 2b + 3c + 4 = 0 \dots\dots\dots$ ①

$$2a - 3b + 4c - 5 = 0 \dots\dots\dots$$
 ②

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 3a - 5b + 7c - 1 = 0$$

$$\therefore 6a - 10b + 14c - 3 = -1$$

17、 作 $DF \perp BC$ 于点 D , 设 $EF = x$

$$\therefore DE = DA_1 - A_1E = 15 - x,$$

由勾股定理: $DE^2 + DF^2 = EF^2$,

$$\text{得出 } (15 - x)^2 = 10^2 + x^2, \text{ 所以 } x = \frac{25}{6}$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CE \cdot DF = \frac{1}{2} \left(\frac{25}{6} + 25 - 15 \right) \times 10 = \frac{425}{6}$$

18、 原式 = $a^2 + 4b^2 - 4ab + 4a^2 - 32a + 64 + b^2 - 4b + 4 - 58$

$$= (a - 2b)^2 + 4(a - 4)^2 + (b - 2)^2 - 58 \geq -58$$

当 $a=4$ 且 $b=2$ 时, 取“=”, 所以原式的最小值为 -58

19、 $\angle ABC = 30^\circ$, $\therefore \angle ABA_1 = 150^\circ = \angle CBC_1$

$$S_{\text{阴}} = S_{\text{扇} BAA_1} + S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇} BCC_1} - S_{\triangle BC_1A_1} = S_{\text{扇} BAA_1} - S_{\text{扇} BCC_1}$$

$$= \frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1^2) = \frac{5}{12} \pi$$

20、 设轿车，货车，客车速度分别为 V_1 、 V_2 、 V_3 ，轿车、货车、客车之间的初始距离为 S 。

$$V_1 - V_2 = \frac{S}{10} \dots\dots\dots ①$$

$$V_1 - V_3 = \frac{2S}{15} \dots\dots\dots ②$$

$$② - ① \text{得} : V_2 - V_3 = \frac{2S}{15} - \frac{S}{10} = \frac{S}{30}$$

$$t = 30 - 10 - 5 = 15$$

21、 $2x - 3y - z = 56 \dots\dots\dots ①$

$$x + 6y + 4z = 91 \dots\dots\dots ②$$

$$② - ① \text{得} : \frac{x + y + z}{3} = \frac{49}{3}$$

$$(x - 3)^2 = 36, \therefore x - 3 = \pm 6, \text{ 又因 } x > 0, \therefore x = 9$$

代入①、②得 $y = -39, z = 79$

22、 $(2, 3, 4) (2, 4, 5) (2, 5, 6) (3, 4, 5) (3, 4, 6)$
 $(3, 5, 6) (4, 5, 6)$ 共 7 个，其中只有 $(3, 4, 5)$ 为直角三角形。

23、 $0.011 \times 1500 \times 0.5 = 8.25$ (元)

设照明时间为 x 小时, 费用相同

$$27 + 0.011x \times 0.5 = 2.5 + 0.06x \times 0.5$$

解方程得 $x = 1000$

24、 设 $a = 3p$, $b = 3q$. $\therefore (p, q) = 1$, 且 $pq = 20$

因为 $a > b$, 即 $p > q$.

$$\therefore \begin{cases} p = 5 \\ q = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p = 20 \\ q = 1 \end{cases}, \text{ 即 } \frac{a^2 - b^2}{2ab} = \frac{9}{40} \text{ 或 } \frac{399}{40}$$

25、 设 $\angle CAB = 2\alpha$

$$\therefore AM = ML, \text{ 且 } \angle CAB = 90^\circ$$

$$\therefore CM = MA$$

$$\therefore \angle ACM = \angle MAC = \alpha$$

$$\therefore \angle CKB = \angle CAK + \angle ACM = 3\alpha$$

$$\angle KCB = 90^\circ - \angle ACM = 90^\circ - \alpha$$

$$\therefore BK = BC$$

$$\therefore \angle CKB = \angle KCB$$

$$\therefore 3\alpha = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{即 } \alpha = 22.5^\circ$$

$$\therefore \angle CAB = 45^\circ, \frac{\angle ACK}{\angle KCB} = \frac{22.5^\circ}{67.5^\circ} = \frac{1}{3}$$