

第14届世界奥林匹克数学竞赛(中国区)选拔赛

考场
准考证号
学校
年级
姓名
赛区
联系电话
姓名
赛区

考生须知:

- 每位考生将获得考卷一份。考试期间,不得使用计算工具或手机。
- 本卷共120分,选择题每小题4分,填空题每小题5分,解答题共5小题,共50分。
- 请将答案写在答题卡上。考试完毕时,试卷、答题卡及草稿纸将被收回。
- 若计算结果是分数,请化至最简。

七年级全国总决赛初赛

(本试卷满分120分,考试时间90分钟)

一、选择题(每小题4分,共40分)

- 在秋季运动会的跳远比赛中,以4.00米为标准,若旭东跳出了4.22米,可记作+0.22,那么旭东跳出了3.85米,记作()
A. -0.15 B. +0.22 C. +0.15 D. -0.22
- 已知 $x+y+2(-x-y+1)=3(1-y-x)$, 则 $x+y$ 等于()
A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- 如图,已知 $\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$, $\angle BOD=\gamma$, 则 $\angle COD$ 的大小是()
A. $\alpha-\beta-\gamma$ B. $\alpha+\beta-\gamma$ C. $\alpha+\gamma-\beta$ D. $\beta+\gamma-\alpha$
- 多项式 $x^2+ax-2y+7-(bx^2-2x+9y-1)$ 的值与 x 的取值无关,则 $-a+b$ 的值为()
A. 3 B. 1 C. -2 D. 2
- 如图,已知 A, B, C, D, E 五个点在同一直线上,且满足 $AC=\frac{1}{3}AB$, $BD=\frac{1}{4}AB$, $AE=CD$, 则 CE 为 AB 长的()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{5}{12}$
- 我们称 (a, b) 为数对,若非负整数 a, b 满足 $|a-b|+ab=1$, 则 (a, b) 有()
A. 1对 B. 2对 C. 3对 D. 4对
- 依依在某月的日历中圈出了几个数,算得其中三个数(\times 处)的和为36,那么这三个数的形式可能是()
A.

\times	\times
\times	\times

 B.

\times	\times
\times	\times

 C.

\times	\times	\times
\times	\times	\times

 D.

\times	\times	\times
\times	\times	\times

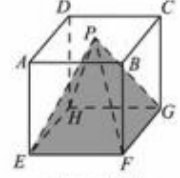
- 如图为手的示意图,在各个手指间标记字母 A, B, C, D . 请你按图中箭头所指方向(即 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \dots$ 的方式)从 A 开始数连续的正整数1, 2, 3, 4..., 当字母 C 第201次出现时,恰好数到的数是()
A. 603 B. 605 C. 601 D. 600



第8题图



第9题图



第10题图

- 挑游戏棒是一种好玩的游戏,游戏规则是:当一根棒条没有被其他棒条压着时,就可以把它往上拿走.如图,按照这一规则,第1次应拿走⑨号棒,第2次应拿走⑤号棒, ..., 则第6次应拿走()
A. ②号棒 B. ⑦号棒 C. ⑧号棒 D. ⑩号棒
- 一个边长为5厘米的正方体,它是由125个边长为1厘米的小正方体组成的, P 为上底面 $ABCD$ 的中心,如果挖去的阴影部分为四棱锥,小欣想找到剩下部分包括的完整的棱长是1厘米的小正方体,她能找到()
A. 20个 B. 56个 C. 64个 D. 105个

二、填空题(每小题5分,共30分)

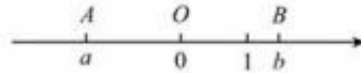
- $-2^2+8 \div (-2)^3 =$ _____.
- 已知 ax^2 与 $1-2bx$ 互为相反数,则代数式 $bx - \frac{a}{2}x^2 - 3$ 的值是_____.
- 一条直线上有 n 个不同点,以这 n 个点为端点的射线共有_____条.
- $\angle A, \angle B, \angle C$ 中有两个锐角和一个钝角,其数值已经给出,在计算 $\frac{1}{15}(\angle A + \angle B + \angle C)$ 的数值时,三位同学算出了三个答案: $23^\circ, 24^\circ, 25^\circ$, 其中只有一个答案是正确的,则 $\angle A + \angle B + \angle C$ 的度数是_____.
- a, b, c, d, e 都是大于1的自然数,它们的乘积 $abcde=2000$, 则其和 $a+b+c+d+e$ 的最大值为_____.

- 已知 $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 我们定义 $b_1=2(1-a_1)$, $b_2=2(1-a_1) \times (1-a_2)$, $b_3=2(1-a_1) \times (1-a_2) \times (1-a_3)$, ..., 根据你观察的规律可推测出 b_{2016} 的值为_____.

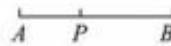
三、解答题(共5小题,共50分)

- 先化简,再求值: $5(x^2-2y) - \frac{2}{3}(x^2-2y) - 8(x^2-2y) - \frac{1}{3}(x^2-2y)$, 其中 $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$. (8分)

- 在数轴上表示 $a, 0, 1, b$ 四个数的点如图所示,已知 O 为 AB 的中点.你能求出 $|a+b| + |\frac{a}{b}| + |a+1|$ 的值吗? (9分)



- 如图所示,把一根细绳对折成线段 AB ,再从点 P 处把细绳剪断,已知 $AP:BP=2:3$,若剪断后的各段绳子中最长的一段为60cm,求细绳的原长. (10分)

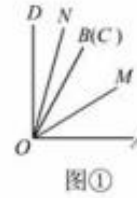


- 假设航空母舰始终以200千米/时的速度由西向东航行,飞机以800千米/时的速度从舰上起飞,向西航行执行任务,如果飞机在空中最多能连续飞行3个小时,那么它在起飞几小时后就必须返航,才能保证安全停在航空母舰上? (10分)

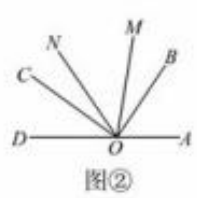


- 已知 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 互余($\angle COD$ 的两边不在 $\angle AOB$ 的内部), OM 平分 $\angle AOC$, ON 平分 $\angle BOD$, 将 $\angle COD$ 绕着点 O 逆时针旋转,使 $\angle BOC=\alpha$ ($0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$).

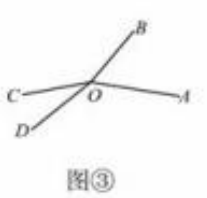
- 若 $\angle AOB=60^\circ, \angle COD=30^\circ$.
(i) 当 $\alpha=0^\circ$ 时,即 OB 与 OC 重合,如图①, $\angle MON=$ _____; (2分)
(ii) 当 $\alpha=90^\circ$ 时,即 OA 与 OD 在一条直线上,如图②, $\angle MON=$ _____; (2分)
(iii) 当 $\alpha=140^\circ$ 时,请补全图形(如图③),并求出 $\angle MON$ 的度数. (5分) ($\angle AOC, \angle BOD$ 均小于 180°)
- 若 $\angle AOB=\beta, \angle COD=\gamma$ ($\beta>\gamma$), 则 $\angle MON=$ _____ (直接写出答案). (4分)



图①



图②



图③

第 14 届全国总决赛 7 年级初赛答案

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1.A 2.D 3.D 4.A 5.C 6.C 7.B 8.A 9.B 10.B

3. $\because \angle BOC = \angle AOB - \angle AOC$, $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$,

$\therefore \angle BOC = \alpha - \beta$, 又 $\because \angle COD = \angle BOD - \angle BOC$, $\angle BOD = \gamma$,

$\therefore \angle COD = \gamma - (\alpha - \beta) = \gamma - \alpha + \beta = \beta + \gamma - \alpha$.

4. 原式 $= x^2 + ax - 2y + 7 - bx^2 + 2x - 9y + 1 = (1-b)x^2 + (a+2)x - 11y + 8$, 由结果与 x 的取值无关, 得到 $1-b=0$, 且 $a+2=0$, 解得: $a=-2$, $b=1$, 则 $-a+b=2+1=3$.

5. 如图, 设 $AB=x$, 则 $AC=\frac{1}{3}x$, $BD=\frac{1}{4}x$, $\because AE=CD$, $\therefore AC=DE=\frac{1}{3}x$, $EB=\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{12}x$,

$\therefore CE=AB-AC-EB=x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}x = \frac{7}{12}x$, 故 CE 为 AB 长的 $\frac{7}{12}$. 

6. 由已知条件得 $\begin{cases} |a-b|=1, \\ ab=0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |a-b|=0, \\ ab=1. \end{cases}$ 而 $a \geq 0, b \geq 0$, 故 $a=1$, 或 $b=1$, 或 $a=b=1$, 因

此满足条件的 (a, b) 有 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ 共 3 对.

7. 第一个图中: 设下面的数是 x , 则上面的数是 $x-7$, 右边的是 $x-6$,

根据题意得: $x + (x-7) + (x-6) = 36$, 解得 $x = \frac{49}{3}$, 不合题意.

第二个图中: 设下面的数是 x , 则上面的数是 $x-7$, 左边的数是 $x-8$,

根据题意得: $x + (x-7) + (x-8) = 36$, 解得 $x=17$, 符合题意.

第三个图中: 设下面左边的数是 x , 则右边的数是: $x+2$, 上面的数是 $x+1-7=x-6$,

根据题意得: $x + (x+2) + (x-6) = 36$ 解得: $x = \frac{40}{3}$, 不合题意.

第四个图中: 设下面的数是 x , 则上面左边的数是: $x-7-1=x-8$, 右边的数是: $x-8+2=x-6$,

根据题意得: $x + (x-8) + (x-6) = 36$ 解得: $x = \frac{50}{3}$, 不合题意.

8. 依题意可知每六个字母为一周期循环, 当字母 C 第 201 次出现时, 由于每组字母中 C 出现两次, 则这组字母应该出现 100 次后还要加一次 C 字母出现, 而第一个 C 字母在第三个出现, 所以应该是 $100 \times 6 + 3 = 603$.

9. 仔细观察图形发现: 第 1 次应拿走⑨号棒, 第 2 次应拿走⑤号棒, 第 3 次应拿走⑥号棒, 第 4 次应拿走②号棒, 第 5 次应拿走⑧号棒, 第 6 次应拿走⑦号棒.

10. 剩下的图形中, 从上往下数, 第一层完整的正方体个数为 $25-1=24$ (个), 第二层完整的正方体个数为 $25-9=16$ (个), 第三层完整的正方体个数为 $25-9=16$ (个), 第四、五层都没有完整的正方体, 因此共有 $24+16+16=56$ (个).

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

11. -5 12. $-\frac{5}{2}$ 13. $2n$ 14. 345° 15. 133 16. $\frac{2018}{2017}$

14. 由已知得 $90^\circ < \angle A + \angle B + \angle C < 360^\circ$, 而 $15 \times 23^\circ = 345^\circ$, $15 \times 24^\circ = 360^\circ$, $15 \times 25^\circ = 375^\circ$, 这里只有 345° 符合要求.

15. 为使 $S=a+b+c+d+e$ 尽可能大, 在 $abcde=2000=2^4 \times 5^3$ 的分解中, 显然应取 $a=5^3, b=c=d=e=2$, 这时最大值 $S=125+8=133$.

16. $\because b_1=2(1-a_1)=\frac{3}{2}$, $b_2=2(1-a_1)(1-a_2)=\frac{4}{3}$, $b_3=2(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)=\frac{5}{4}$, \dots , $\therefore b_n=\frac{n+2}{n+1}$, $\therefore b_{2016}=\frac{2016+2}{2016+1}=\frac{2018}{2017}$.

三、解答题（共5小题，共50分）

17.解：原式 $=5x^2-10y-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}y-8x^2+16y-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}y=-4x^2+8y$ ，当 $x=-\frac{1}{2}$ ， $y=\frac{1}{3}$ 时，

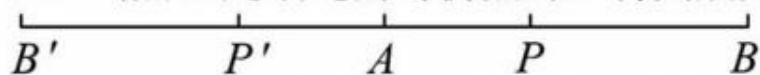
$$\text{原式}=-1+\frac{8}{3}=\frac{5}{3}.$$

18.解： $\because O$ 为 AB 的中点，则 $a+b=0$ ， $a=-b$ ．有 $|a+b|=0$ ， $|\frac{a}{b}|=1$ ．

由数轴可知： $a < -1$ ．则 $|a+1|=-a-1$ ． \therefore 原式 $=0+1-a-1=-a$ ．

19.解：本题有两种情形：

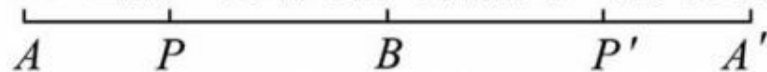
(1) 当点 A 是细绳的对折点时，将其展开如图：



$\because AP:BP=2:3$ ，剪断后的各段绳子中最长的一段为60cm，则最长的一段就是 $P'P$ ，

$\therefore 2AP=60\text{cm}$ ， $\therefore AP=30\text{cm}$ ， $PB=45\text{cm}$ ，故细绳的原长 $=2AB=2(AP+PB)=2\times(30+45)=150(\text{cm})$ ；

(2) 当点 B 是细绳的对折点时，将其展开如图：



$\because AP:BP=2:3$ ，剪断后的各段绳子中最长的一段为60cm，则最长的一段就是 PP' ，

$\therefore 2BP=60\text{cm}$ ， $\therefore BP=30\text{cm}$ ， $AP=20\text{cm}$ ，故细绳的原长 $=2AB=2(AP+BP)=2\times(20+30)=100(\text{cm})$ ．

综上，细绳的原长为150cm或100cm．

20.解：设飞机在起飞 x 小时后就必须返航，才能安全停在舰上．

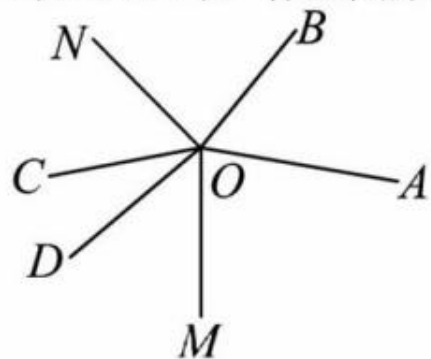
由题意得： $(800-200)(3-x)=800x+200x$ ，整理得出： $16x=18$ ，解得： $x=\frac{9}{8}$ ．

答：飞机在起飞 $\frac{9}{8}$ 小时后就必须返航，才能安全停在舰上．

21.解：(1) (i) $\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD=45^\circ$ ．

(ii) 当 $\alpha=90^\circ$ 时， $\angle MON=180^\circ-(\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD)=180^\circ-[\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)+\frac{1}{2}(\angle COD+\angle BOC)]=180^\circ-[\frac{1}{2}(60^\circ+90^\circ)+\frac{1}{2}(30^\circ+90^\circ)]=45^\circ$ ．

(iii) 当 $\alpha=140^\circ$ 时，补全图形如下：



$\angle MON=\angle MOC+\angle NOD-\angle COD=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD-\angle COD=\frac{1}{2}(\angle AOD+\angle DOC)$

$+\frac{1}{2}(\angle BOC+\angle COD)-\angle COD=\frac{1}{2}(\angle AOD+\angle BOC)=\frac{1}{2}(360^\circ-90^\circ)=135^\circ$ ；

(2) 135° 或 45°