第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A（初二组）

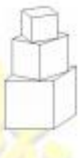
（时间: 2013 年 4 月 20 日 10:00～11:30）

一、填空题（每小题 10 分, 共 80 分）

1. 化简: $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=$_______.

2. 从 1～2013 的自然数中, 含有重复数字的自然数的个数等于_______.

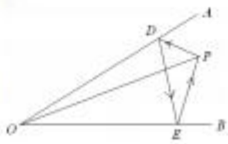
3. 三个正方体粘在一起构成的几何体如图所示, 其中上面正方体的下底面正方形的四个顶点分别是下面正方体上底面正方形的三等分点. 如果最下面正方体的棱长为 9, 那么这个几何体的表面积是_______.



4. 对一切实数 x, 不等式 $x^2+|4x-a|\geq 6$ 均成立, 则非负实数 a 的最小值是_______.

5. 已知二次三项式 ax^2+bx+c 当 $x=2$ 时, 取到最小值 -1; 且它的两根的立方和为 24. 如果 $x=-1$, 那么这个二次三项式的值是_______.

6. 已知 $\angle AOB=30^\circ$. 在角的内部距顶点 O 为 1 米的 P 点住有一个蓝精灵. 蓝精灵从 P 走到角的 OA 边上的一点, 即刻返身走到 OB 边的一点, 然后走回到 P 点. 蓝精灵所走的最短路程是_______米.



7. 已知在平面直角坐标系中有如下 36 条直线:

$$y=18x+17,\ y=17x+16,\ \ldots,\ y=2x+1,\ y=x,$$

$$y=-x,\ y=-2x+1,\ \ldots,\ y=-17x+16,\ y=-18x+17,$$

那么由这些直线相交所构成的交点有________个.

8. 若在实数范围内有因式分解：$x^3+px+q=(x-a)(x-b)(x-c)$，且$q\neq0$，则

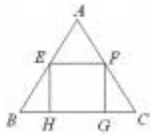
$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=$________.

二、解答下列各题（每题10分，共40分，要求写出简要过程）

9. 只用4个数码4和一些加、减、乘、除、幂、开平方运算和括号，写出5个不同的、值都等于7的算式.（通过加法、乘法交换律和结合律，使两个算式相同，则视为相同的算式，如：$4+4-\sqrt{4\div4}$，$4-\sqrt{4\div4}+4$，$-\sqrt{4\div4}+4+4$和$-(\sqrt{4\div4}-4)+4$ 都视为相同的算式.）

10. 学校对植树有两种补贴方案：第一种方案是每成活一棵补助5元，不成活的每棵补助2元，未完成植树任务的部分，不补也不罚；第二种方案是，先补贴130元，再每成活一棵补贴3元，不成活的每棵罚1元，未完成植树任务的部分，每棵罚2元. 不管按照那种方案补贴，梁兵都得到种树补贴271元. 问：梁兵的植树任务是多少棵？

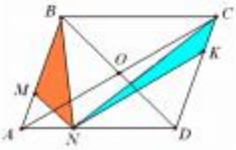
11. 如图，矩形$EFGH$内接于边长为1的正三角形ABC中，GH在BC边上. 当矩形$EFGH$的面积最大时，求其面积.



12. 黑板上写有$1, 2, \cdots, 2013$这2013个数，某人擦去黑板上的任意n个数，要使得剩下的数中至少有两个数的和是2的幂次，请问：n最大是多少？

三、解答下列各题（每小题15分，共30分，要求写出详细过程）

13. 平行四边形$ABCD$的边AD上任取一点N，过N作平行于对角线AC，BD的直线分别交边AB，CD于点M和K. 证明：三角形NMB与NKC等积.



14. 解方程：

$$[x]+\left[x+\frac{1}{8}\right]+\left[x+\frac{2}{8}\right]+\cdots+\left[x+\frac{7}{8}\right]=8x^2+\frac{7}{8},$$

其中 $[a]$ 表示不大于a的最大整数.

第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A 参考答案

（初二组）

一、填空（每题 10 分, 共 80 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\sqrt{2}$	770	766	10	$\frac{25}{2}$	1	326	3

二、解答下列各题（每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程）

9.

解答. 例如

$$4\div4+\sqrt{4}+4=7,\ \sqrt{4\div4}+\sqrt{4}+4=7,$$

$$4+4-4\div4=7,\ 44\div4-4=7,\ \ 4\times\sqrt{4}-4\div4=7.$$

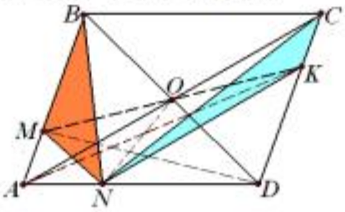
10. 答案： 61

11. 答案： $\frac{\sqrt{3}}{8}$

12. 答案： 1003

三、解答下列各题（每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程）

13.



解答. 连接 AK. 先证 $AM=CK$.

$$\frac{CK}{CD}=\frac{\Delta ACK\text{的面积}}{\Delta ACD\text{的面积}}=\frac{\Delta ACN\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}$$

$$=\frac{\Delta ABN\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}=\frac{\Delta AMD\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}=\frac{AM}{AB}.$$

因为 $CD=AB$，所以 $AM=CK$. 连接 OM，OK，ON. 则 $\triangle OMA \cong \triangle OKC$. 所以 $\angle MOA=\angle KOC$. 因此

$$\angle MOA+\angle AOK=\angle KOC+\angle AOK=180^\circ,$$

所以 M，O，K 共线，ON 是 $\triangle KNM$ 的中线，所以

$$\triangle ONM\text{ 的面积}=\triangle OKN\text{ 的面积}.$$

但

$$\triangle NMB\text{ 的面积}=\triangle ONM\text{ 的面积}，\triangle NKC\text{ 的面积}=\triangle ONK\text{ 的面积}.$$

所以

$$\triangle ONM\text{ 的面积}=\triangle OKC\text{ 的面积}.$$

因此，三角形 NMB 与 NKC 等积.

14. $\frac{1}{8},\frac{\sqrt{33}}{8},\frac{\sqrt{41}}{8},\frac{7}{8}$