2014年全国初中数学竞赛预赛

试题及参考答案

（竞赛时间：2014年3月2日上午9:00--11:00）

一、选择题（共6小题，每小题6分，共36分） 以下每小题均给出了代号为A，B，C，D的四个选项，其中有且只有一个选项是正确的. 请将正确选项的代号字母填入题后的括号里，不填、多填或错填都得0分）

1．若a是最大的负整数，b是绝对值最小的有理数，c是倒数等于它本身的自然数，则$a^{2013}+2014b+c^{2015}$的值为【　　】

（A）2013　　（B）2014　　（C）2015　　（D）0

【答】D.

解：最大的负整数是－1，∴a=－1；

绝对值最小的有理数是0，∴b=0；

倒数等于它本身的自然数是1，∴c=1.

∴$a^{2013}+2014b+c^{2015}=(-1)^{2013}+2014\times 0+1^{2015}$=0.

2. 已知实数x,y,z满足$\begin{cases}x+y+z=5,\\4x+y-2z=2.\end{cases}$则代数式$4x-4z+1$的值是【　　】

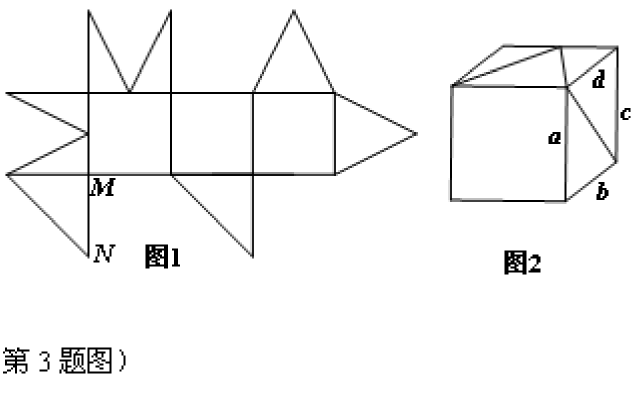
（A）-3　　（B）3　　（C）-7　　（D）7

【答】A.

解：两式相减得$3x-3z=-3$，则$4x-4z+1=-3$.

3．如图，将表面展开图（图1）还原为正方体，按图2所示摆放，那么，图1中的线段*MN*在图2中的对应线段是【　　】

（A）a　　（B）b　　（C）c　　（D）d



（第3题图）

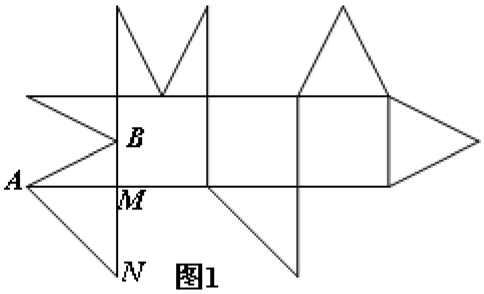


图1

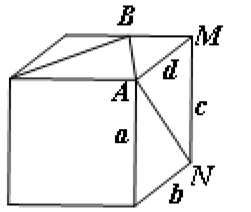


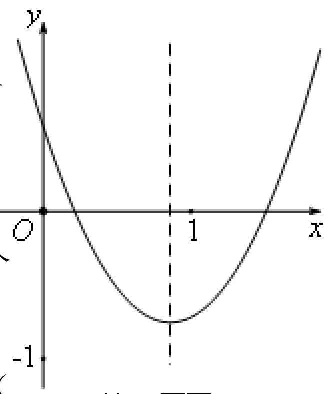
图2

【答】C.

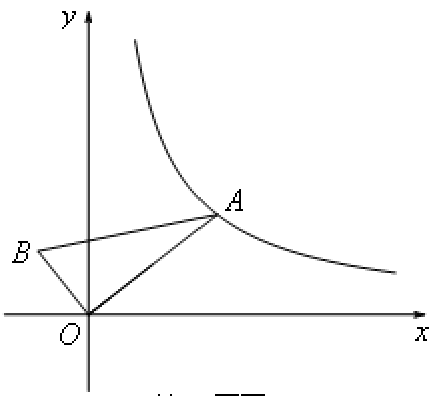
解：将图 1 中的平面图折成正方体，*MN* 和线段 *c* 重合.不妨设图 1 中完整的正方形为完整面，△*AMN* 和△*ABM* 所在的面为组合面，则△*AMN* 和△*ABM* 所在的面为两个相邻的组合面，比较图 2，首先确定 *B* 点，所以线段 *d* 与 *AM* 重合，*MN* 与线段 *c* 重合.

4. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象如图所示，则下列 7 个代数式ab，ac，bc，b^2-4ac，$a+b+c$，$a-b+c$，$2a+b$中，其值为正的式子的个数为【　　】

（A）2个



（第 4 题图）



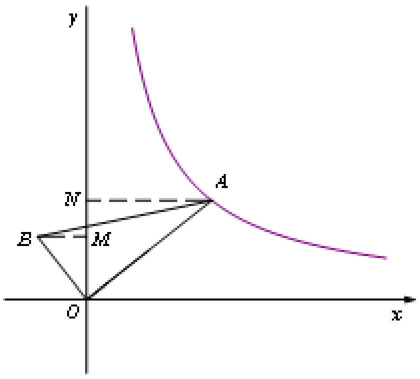
（第 5 题图）

（B）3 个　　（C）4 个　　（D）4 个以上

【答】C.

解：由图象可得：$a>0$，$b<0$，$c>0$，$\therefore ab<0$，$ac>0$，$bc<0$.

抛物线与 x 轴有两个交点，$\therefore b^2-4ac>0$. 当 x =1 时，$y<0$，即



$a+b+c<0$.

当 $x=-1$ 时，$y>0$，即 $a-b+c>0$. 从图象可得，抛物线对称轴在直线 x =1 的左边，即 $-\dfrac{b}{2a}<1$，$\therefore 2a+b>0$.因此 7 个代数式中，其值为正的式子的个数为 4 个.

5. 如图，Rt△*OAB* 的顶点 *O* 与坐标原点重合，∠*AOB*=90°，*AO*=2*BO*，当 *A* 点在反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ （*x*>0）的图象上移动时，*B* 点坐标满足的函数解析式为【　　】

（A）$y=-\dfrac{1}{8x}$ （*x*<0）　　（B）$y=-\dfrac{1}{4x}$ （*x*<0）

（C）$y=-\dfrac{1}{2x}$ （*x*<0）　　（D）$y=-\dfrac{1}{x}$ （*x*<0）

【答】B.

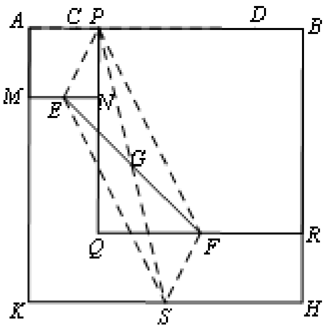
解: 如图，分别过点 A,B 分别做 y 轴的垂线 AN,BM，那么 $\Delta ANO \backsim \Delta OMB$，

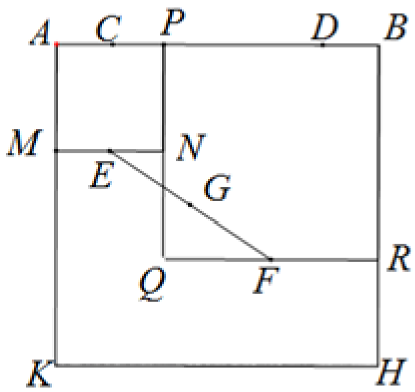
则 $\dfrac{S_{\Delta ANO}}{S_{\Delta OMB}}=(\dfrac{OA}{OB})^2=4.$　　$\because S_{\Delta ANO}=\dfrac{1}{2}ON\times AN=\dfrac{1}{2},\therefore S_{\Delta OMB}=\dfrac{1}{8}.$

$\therefore OM\times BM=\dfrac{1}{4}$，故 $y=-\dfrac{1}{4x}$.

6．如图，四边形 *ABHK* 是边长为 6 的正方形，点 *C*、*D* 在边 AB 上，且 *AC*=*DB*=1，点 *P* 是线段 *CD* 上的动点，分别以 *AP*、*PB* 为边在线段 *AB* 的同侧作正方形 *AMNP* 和正方形 *BRQP*，*E*、*F* 分别为 *MN*、*QR* 的中点，连接 *EF*，设 *EF* 的中点为 *G*，则当点 *P* 从点 *C* 运动到点 *D* 时，点 *G* 移动的路径长为【　　】

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）6





（第6题图）

【答】B.

解：设 KH 中点为 S，连接 PE、ES、SF、PF、PS，可证明四边形 $PESF$ 为平行四边形，

∴G 为 PS 的中点，即在点 P 运动过程中，G 始终为 PS 的中点，所以 G 的运行轨迹为△CSD 的中位线，

∵ $CD=AB-AC-BD=6-1-1=4$，∴点 G 移动的路径长为 $\frac{1}{2}\times 4$ =2.

二、填空题（共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

7. 已知 $-\frac{3}{2}<x<2$，化简 $|2x+3|-\sqrt{(x-9)^2}$ 得__________.

【答】$3x-6$.

解：∵ $-\frac{3}{2}<x<2$，∴ $2x+3>0$，$x-9<0$，

原式= $2x+3+x-9=3x-6$.

8. 一个不透明的袋子中有除颜色外其余都相同的红、黄、蓝色玻璃球若干个，其中红色玻璃球有 6 个，黄色玻璃球有 9 个，已知从袋子中随机摸出一个蓝色玻璃球的概率为 $\frac{2}{5}$，那么，随机摸出一个为红色玻璃球的概率为__________.

【答】$\frac{6}{25}$.

解：设口袋中蓝色玻璃球有x个，依题意，得$\frac{x}{6+9+x}=\frac{2}{5}$，即$x$=10，所以P（摸出一个红色玻璃球）$=\frac{6}{6+9+10}=\frac{6}{25}$.

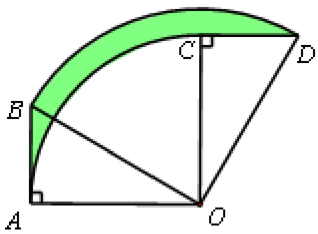
9．若$\frac{x^2+x+1}{x}=4$，则$x^2+\frac{1}{x^2}+1=$__________.

【答】8．

解：∵$\frac{x^2+x+1}{x}=4$，∴$x+\frac{1}{x}=3$.

则$(x+\frac{1}{x})^2=9$，即$x^2+\frac{1}{x^2}=7$，∴$x^2+\frac{1}{x^2}+1=8$.

10．如图，在Rt△*OAB*中，∠*AOB*=30°，*AB*=2，将Rt△*OAB*绕*O*点顺时针旋转90°得到Rt△*OCD*，则*AB*扫过的面积为__________.



（第10题图）

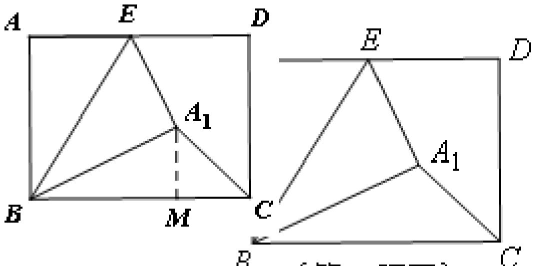
【答】π.

解：∵Rt△*OAB*中，∠*AOB*=30°，*AB*=2，

∴*AO*=*CO*=$2\sqrt{3}$，*BO*=*DO*=4，

∴阴影部分面积=$S_{扇形OBD}+S_{\triangle AOB}-S_{扇形OAC}-S_{\triangle COD}=S_{扇形OBD}-S_{扇形OAC}$

$=\frac{90\times\pi\times4^2}{360}-\frac{90\times\pi\times(2\sqrt{3})^2}{360}=\pi$.



（第11题图）

11．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，点 E 是 AD 上一个动点，把△BAE 沿 BE 向矩形内部折叠，当点 A 的对应点 A_1 恰落在∠BCD 的平分线上时，CA_1=____________.

【答】$2\sqrt{2}\pm 1$.

解：过 A_1 作 $A_1M\perp BC$，垂足为 M，设 $CM=A_1M=x$，则 $BM=4-x$，
在 Rt△A_1BM 中，

$A_1M^2=A_1B^2-BM^2=9-(4-x)^2$，

∴ $9-(4-x)^2=x^2$，∴$x=A_1M=2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴在等腰 Rt△A_1CM 中，$CA_1=2\sqrt{2}\pm 1$.

12．已知 a、b、c、d 是四个不同的整数，且满足 $a+b+c+d=5$，若 m 是关于 x 的方程（$x-a$）（$x-b$）（$x-c$）（$x-d$）=2014 中大于 a、b、c、d 的一个整数根，则 m 的值为_______.

【答】20.

解：∵（$m-a$）（$m-b$）（$m-c$）（$m-d$）=2014，且 a、b、c、d 是四个不同的整数，由于 m 是大于 a、b、c、d 的一个整数根，∴（$m-a$）、（$m-b$）、（$m-c$）、（$m-d$）是四个不同的正整数.　　∵$2014=1\times2\times19\times53$，

∴（$m-a$）+（$m-b$）+（$m-c$）+（$m-d$）=1+2+19+53=75.

又∵$a+b+c+d=5$，∴$m=20$.

三、解答题（第 13 题 14 分，第 14 题 16 分，第 15 题 18 分，共 48 分）

13. 某学校为九年级数学竞赛获奖选手购买以下三种奖品，其中小笔记本每本 5 元，大笔记本每本 7 元，钢笔每支 10 元，购买的大笔记本的数量是钢笔数量的 2 倍，共花费 346 元，若使购买的奖品总数最多，则这三种奖品的购买数量各为多少？

解：设购买小笔记本 x 本，大笔记本 y 本，钢笔 z 支，

则有 $5x+7y+10z=346$，$y=2z$.

易知 $0<x\leqslant69$，$0<y\leqslant49$，$0<z\leqslant34$，…………………………………………4 分

∴ $5x+14z+10z=346$，$5x+24z=346$，即 $x=\frac{346-24z}{5}$.

∵x，y，z 均为正整数，$346-24z\geqslant0$，即 $0<z\leqslant14$

∴z 只能取 14，9 和 4. ……………………………………………………………8 分

①当 z 为 14 时，$x=\frac{346-24z}{5}$=2，$y=2z$=28. $x+y+z=44$.

②当 z 为 9 时，$x=\frac{346-24z}{5}$=26，$y=2z$=18. $x+y+z=53$.

③当 z 为 4 时，$x=\frac{346-24z}{5}$=50，$y=2z$=8. $x+y+z=62$.

综上所述，若使购买的奖品总数最多，应购买小笔记本 50 本，大笔记本 8 本，钢笔 4 支. ……………………………………………………………………14 分

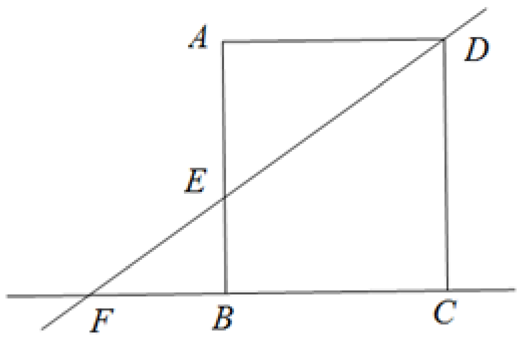
14.如图，在矩形 *ABCD* 中，*AD*=8，直线 *DE* 交直线 *AB* 于点 *E*，交直线 *BC* 于 *F*，*AE*=6.

（1）若点 *P* 是边 *AD* 上的一个动点(不与点 *A*、*D* 重合)，$PH\perp DE$于H，设 *DP* 为 *x*, 四边形 *AEHP* 的面积为 *y*, 试求 *y* 与 *x* 的函数解析式；

（2）若 *AE*=2*EB*.

①求圆心在直线 *BC* 上，且与直线 *DE*、*AB* 都相切的⊙*O* 的半径长；

②圆心在直线 *BC* 上，且与直线 *DE* 及矩形 *ABCD* 的某一边所在直线都相切的圆共有多少个？（直接写出满足条件的圆的个数即可.）

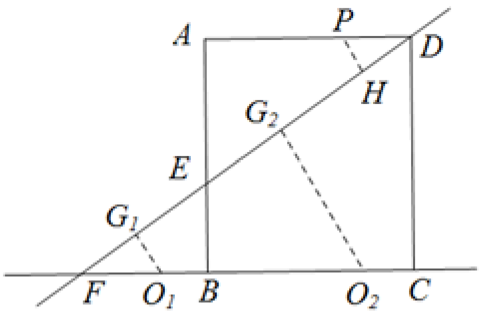


14、解：（1）在 RtΔAED 中，$\because AE=6, AD=8, \therefore ED=10.$

$\because \angle PHD=\angle EAD=90°, \angle PDH=\angle EDA, \therefore \Delta PHD\cong\Delta EAD.$

$\therefore \frac{x}{10}=\frac{DH}{8}=\frac{PH}{6}.\therefore DH=\frac{4}{5}x, PH=\frac{3}{5}x.$

$\therefore y=S_{\Delta AED}-S_{\Delta PHD}=24-\frac{6}{25}x^2.$



……………………………………………………………………5 分

（2）①

$\because AD // BC, \therefore \Delta EBF \backsim \Delta EAD$.

$\therefore \dfrac{EF}{10} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{BF}{8}$.

$\therefore EF = 5, BF = 4$. ……………………7 分

若⊙O_1与直线DE、AB都相切，且圆心O_1在AB的左侧，过点O_1作$O_1G_1 \perp DF$于G_1，则可设$O_1G_1 = O_1B = r_1$.

$\because S_{\Delta EO_1F} + S_{\Delta EBO_1} = S_{\Delta EBF}, \therefore \dfrac{1}{2} r_1 \cdot 5 + \dfrac{1}{2} r_1 \cdot 3 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$. 解得 $r_1 = \dfrac{3}{2}$. ………………10 分

若⊙O_2与直线DE、AB都相切，且圆心O_2在AB的右侧，过点O_2作$O_2G_2 \perp DF$于G_2，则可设$O_2G_2 = O_2B = r_2$.

$\because S_{\Delta FO_2D} = \dfrac{1}{2} \cdot FO_2 \cdot DC = \dfrac{1}{2} \cdot DF \cdot O_2G_2$.

$\therefore \dfrac{1}{2}(4 + r_2)(6 + 3) = \dfrac{1}{2}(10 + 5)\ r_2$.

解得 $r_2 = 6$.

即满足条件的圆的半径为 $\dfrac{3}{2}$ 或 6.………………………………………13 分

② 6 个.………………………………………………………………………16 分

15. 如图 1，等腰梯形 *OABC* 的底边 *OC* 在 *x* 轴上，*AB// OC*, *O* 为坐标原点，*OA* = *AB* =*BC*，∠*AOC*=60°，连接 *OB*，点 *P* 为线段 *OB* 上一个动点，点 *E* 为边 *OC* 中点.

（1）连接 PA、PE，求证：$PA=PE$;

（2）连接 PC，若 $PC+PE=2\sqrt{3}$，试求 AB 的最大值；

（3）在（2）在条件下，当 AB 取最大值时，如图 2，点 M 坐标为（0，－1），点 D 为线段 OC 上一个动点，当 D 点从 O 点向 C 点移动时，直线 MD 与梯形另一边交点为 N，设 D 点横坐标为 m，当△MNC 为钝角三角形时，求 m 的范围.

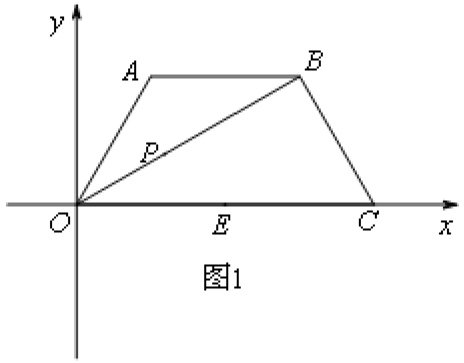


图1

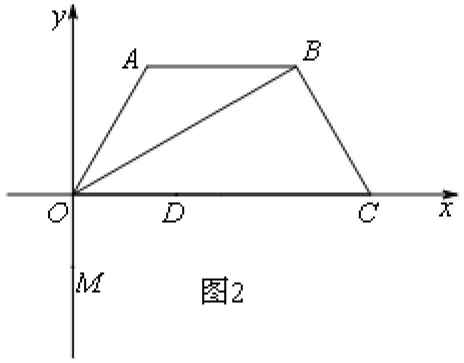


图2

解：（1）证明：如图 1，连接 AE.

$\because OA=AB, \therefore \angle AOB=\angle ABO.$

$\because AB \parallel OC, \therefore \angle ABO=\angle BOC.$

$\because \angle AOC=60°, \therefore \angle AOB=\angle BOC=30°. \therefore \angle OBC=90°.$

$\because E$为OC的中点，$\therefore OC=2BC=2OA. \therefore OAE$为等边三角形.

$\therefore OB$垂直平分线段$AE. \therefore PA=PE.$

………………………………………………………5 分

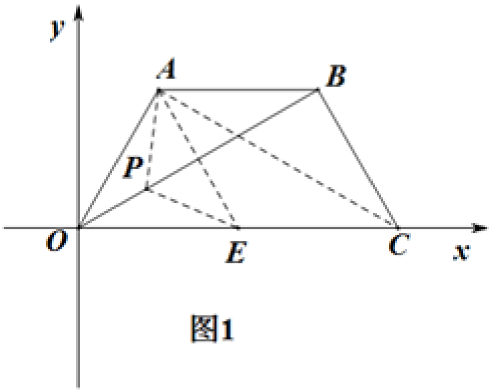


图1

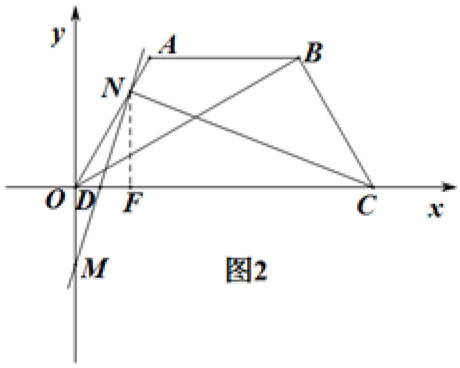


图2

(2) $\because PC+PE=2\sqrt{3}$，$\therefore PC+PA=2\sqrt{3}$.

显然有 $OB=AC\leqslant PC+PA=2\sqrt{3}$. ……………7 分

在 Rt△BOC 中, 设 $AB=OA=BC=x$，则 $OC=2x$，$OB=\sqrt{3}x$，

$\therefore \sqrt{3}x\leqslant 2\sqrt{3}$，$\therefore x\leqslant 2$.

即 AB 的最大值为 2. ……………………………10 分

（3）当 AB 取最大值时，$AB=OA=BC=2$，$OC=4$.

分三种情况讨论：

①当 N 点在 OA 上时，如图 2，若 $CN\perp MN$ 时，此时线段 OA 上 N 点下方的点（不包括 N、O）均满足△MNC 为钝角三角形.

过 N 作 $NF\perp x$ 轴，垂足为 F，

$\because A$ 点坐标为（1，$\sqrt{3}$），$\therefore$可设 N 点坐标为（a，$\sqrt{3}a$），则 $DF=a-m$，

$NF=\sqrt{3}a$，$FC=4-a$.　　$\because$△OMD∽△FND∽△FCN，$\therefore \dfrac{OD}{OM}=\dfrac{DF}{NF}=\dfrac{NF}{FC}$.

$\therefore \dfrac{m}{1}=\dfrac{a-m}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}a}{4-a}$.

解得，$m=\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+1}$，即当 $0<m<\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+1}$ 时，△MNC 为钝角三角形；…14分

②当 N 点在 AB 上时，不能满足△MNC 为钝角三角形；………………15分

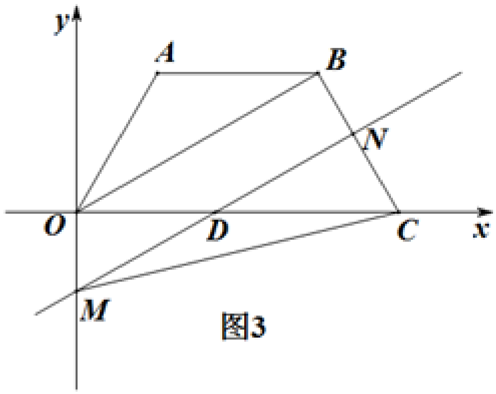


图3

③当 N 点在 BC 上时，如图 3，若 $CN\perp MN$ 时，此时 BC 上 N 点下方的点（不包括 N、C）均满足△MNC 为钝角三角形.

$\because OB\perp BC, CN\perp MN, \therefore MN // OB.$

$\therefore \angle ODM=\angle BOC=30°.$

$\because OM=1, \therefore OD=m=\sqrt{3}.$

∴当 $\sqrt{3}<m<4$ 时，△MNC 为钝角三角形.

综上所述，当 $0<m<\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+1}$ 或 $\sqrt{3}<m<4$ 时，△MNC 为钝角三角形. …1