2016 年全国初中数学联赛(初三组)初赛试卷

（考试时间：2016 年 3 月 4 日下午 3：00—5：00）

班级：:____________　　　姓名：______________　　　成绩：_______________

题　号	一	二	三	四	五	合计
得　分						
评卷人						
复核人						

考生注意：

1、本试卷共五道大题，全卷满分 140 分；

2、用圆珠笔、签字笔或钢笔作答；

3、解题书写不要超出装订线；

4、不能使用计算器。

一、选择题（本题满分 42 分，每小题 7 分）

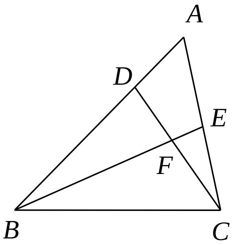
1、已知实数 a、b 满足 $|a-3|+|b-2|+\sqrt{1-a}+a=3$，则 $a+b$ 等于（　　　）

A、-1　　　　B、2　　　　C、3　　　　D、5

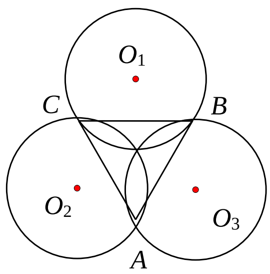
2、如图，点 D、E 分别在 ΔABC 的边 AB、AC 上，BE、CD 相交于点 F，设四边形 $EADF$、ΔBDF、ΔBCF、ΔCEF 的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4，则 S_1S_3 与 S_2S_4 的大小关系为（　　）

A、$S_1S_3 \prec S_2S_4$　　　　B、$S_1S_3 = S_2S_4$

C、$S_1S_3 \succ S_2S_4$　　　　D、不能确定



第 2 题图



第 2 题图

3、对于任意实数 a，b，c，d，有序实数对（a，b）与（c，d）之间的运算“$*$”定义为：$(a,\ b)*(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$. 如果对于任意实数 m，n 都有 $(m,\ n)*(x,\ y)=(n,-m)$，那么 $(x,\ y)$ 为（　　　）

A、（0，1）　　　B、（1，0）　　　C、（−1，0）　　　D、（0，−1）

4、如图，已知三个等圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 有公共点 O，点 A、B、C 是这些圆的其他交点，

则点 O 一定是 ΔABC 的（　　）

A、外心　　B、内心　　C、垂心　　D、重心

5、已知关于 x 的方程 $(x-2)^2-4|x-2|-k=0$ 有四个根，则 k 的范围为（　　）

A、$-1\prec k\prec 0$　　B、$-4\prec k\prec 0$　　C、$0\prec k\prec 1$　　D、$0\prec k\prec 4$

6、设在一个宽度为 w 的小巷内搭梯子，梯子的脚位于 P 点，小巷两边的墙体垂直于水平的地面。将梯子的顶端放于一堵墙的 Q 点时，Q 离开地面的高度为 k，梯子的倾斜角为 $45°$，将该梯子的顶端放于另一堵墙的 R 点时，R 离开地面的高度为 h，梯子的倾斜角为 $75°$，则小巷的宽度 w 等于（　　）

A、h　　B、k　　C、$\sqrt{hk}$　　D、$\dfrac{h+k}{2}$

二、填空题（本大题满分 28 分，每小题 7 分）

7、化简 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 的值为____________.

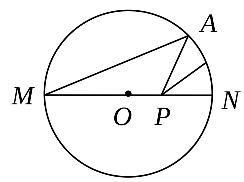
8、如果关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$ 有两个实数根 α、β，那么 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是__________.

9、设四位数 $\overline{abcd}$ 满足 $10d^3=1000a+100c+10d+b$，则这样的四位数有________个.

10、如图，MN 是⊙O 的直径，$MN=2$，点 A 在⊙O 上，$\angle AMN=30°$，B 为 $\overset{\frown}{AN}$ 的中点，P 是直径 MN 上一动点，则 $PA+PB$ 的最小值为__________.

三、（本大题满分 20 分）

11、设实数 a，b，c 满足：$abc\neq 0$ 且 $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，求 $\dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}$ 的值。



四、（本大题满分 25 分）

12、已知抛物线 $y=-x^2+2(m+1)x+m+3$ 与 x 轴相交于两点 A、B（点 A 在 x 轴的正半轴上，点 B 在 x 轴的负半轴上），与 y 轴交于点 C.

（1）求 m 的取值范围；

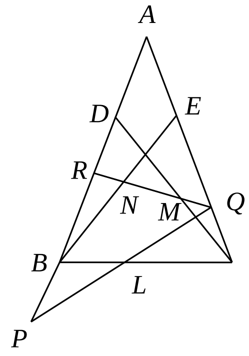
（2）若 $|OA|:|OB|=3:1$，在该抛物线对称轴右边图像上求一点 P 的坐标，使得 $\angle PCO=\angle BCO$.

五、（本大题满分 25 分）

13、如图，等腰三角形 ABC 中，$AB = AC$，D，E 分别在 AB，AC 边上，且 $AD = AE$. P 在 AB 的延长线上，QR 分别在线段 CE、DB 上，且 $BP = CQ = DR$，连结直线 PQ 与 BC 交于点 L，QR 与 CD，BE 分别交于点 M，N. 求证：

（1）$PL = LQ$；

（2）$MQ = NR$



2016年全国初中数学联赛初赛试卷

（考试时间：2016年3月13日下午3：00—5：00）

一、选择题（本题满分42分，每小题7分）

1、C． **2**、C． **3**、D． **4**、C． **5**、B． **6**、A．

二、填空题（本大题满分28分，每小题7分）

7、$\sqrt{6}$． **8**、18． **9**、3． **10**、$\sqrt{2}$．

三、（本大题满分20分）

11、解：由 $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，

得 $13a^2+10b^2+5c^2-4ab-6ac-12bc=0$， …………………………………………（5分）

配方得$(3a-c)^2+(2a-b)^2+(3b-2c)^2=0$， …………………………………………（10分）

所以 $3a-c=0$，$2a-b=0$，$3b-2c=0$，

即 $c=3a$，$b=2a$． ………………………………………………………………（15分）

代入$\dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}$得

$\dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}=\dfrac{a^2+8a^2+27a^2}{2a^2+3a^2+6a^2}=\dfrac{36}{11}$． ………………………………………（20分）

解法二：由 $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，

得 $13a^2+10b^2+5c^2-4ab-6ac-12bc=0$， …………………………………………（5分）

$5[c^2-2(\dfrac{3a+6b}{5})c+(\dfrac{3a+6b}{5})^2]+13a^2+10b^2-4ab-\dfrac{(3a+6b)^2}{5}=0$，

$5(c-\dfrac{3a+6b}{5})^2+\dfrac{56}{5}a^2+\dfrac{14}{5}b^2-\dfrac{56}{5}ab=0$，

所以 $5(c-\dfrac{3a+6b}{5})^2+\dfrac{14}{5}(2a-b)^2=0$， ……………………………………（10分）

由此得，$c-\dfrac{3a+6b}{5}=0$，$2a-b=0$，

解得 $b=2a$，$c=3a$． …………………………………………………………（15分）

代入$\dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}$得

$\dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}=\dfrac{a^2+8a^2+27a^2}{2a^2+3a^2+6a^2}=\dfrac{36}{11}$． ………………………………………（20分）

四、（本大题满分25分）

12、解：（1）由已知得，$-x^2+2(m+1)x+m+3=0$有两个不相同的实数解，

所以$\Delta=[2(m+1)]^2+4(m+3)=4m^2+12m+16=(2m+3)^2+3>0$，

可知 m 是任意实数． ……………………………………………………（5分）

又因为点 A 在 x 轴的负半轴上，点 B 在 x 轴的正半轴上．

所以方程，$-x^2+2(m+1)x+m+3=0$的两根一正一负，

所以$-(m+3)<0$，解得 $m>-3$．

所以所求 m 的取值范围是 $m>-3$． ……………………………………（10分）

（2）解法一：设点 $A(a，0)$，$B(b，0)$，$a>0$，$b<0$，

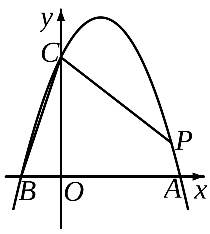
则 $a=-3b$，且 $a+b=2(m+1)$，$ab=-(m+3)$，

解得 $m=0$．

函数解析式为 $y=-x^2+2x+3$． ……………………………………………………（15 分）

所以 $A(3，0)$，$B(-1，0)$，$C(0，3)$。

由∠PCO=∠BCO 可知 BC 与 PC 关于直线 OC 对称。



作 B 关于 OC 的对称点 B'，则 $B'(1，0)$，

设直线 PC 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象，则

$\begin{cases}3=k\cdot 0+b,\\0=k\cdot 1+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-3,\\b=3\end{cases}$。

即 PC 是一次函数 $y=-3x+3$ 的图象。

把 $y=-3x+3$ 代入 $y=-x^2+2x+3$，

得 $-3x+3=-x^2+2x+3$， ……………………………………………………（20 分）

解得 $x=0$，$x=5$，

当 $x=0$时，$y=3$，此时点 P 与点 C 重合，不合题意，舍去；

当 $x=5$时，$y=-12$，此时点 P 的坐标为$(5, -12)$.

故抛物线对称轴右边图象上有一点 $P(5, -12)$，使得∠PCO=∠BCO.

………………………………………………………………………………（25 分）

解法二：设点 $A(a, 0)$，$B(b, 0)$，$a>0$，$b<0$，

则 $a=-3b$，且 $a+b=2(m+1)$，$ab=-(m+3)$，

解得 $m=0$．

函数解析式为 $y=-x^2+2x+3$． ……………………………………………………（15 分）

所以 $A(3, 0)$，$B(-1, 0)$，$C(0, 3)$。

设 P 点的坐标为$(c, -c^2+2c+3)$（$c>1$）.

当 $1<c\leqslant 2$ 时，∠$PCO\geqslant 90°>$∠BCO.

当 $c>2$ 时，$\tan\angle PCO=\dfrac{c}{3-(-c^2+2c+3)}$，

又 $\tan\angle BCO=\dfrac{1}{3}$，由∠$PCO$=∠$BCO$ 得 $\tan\angle PCO=\tan\angle BCO$.

即 $\dfrac{c}{3-(-c^2+2c+3)}=\dfrac{1}{3}$， ……………………………………………………（20分）

解得 $c=5$.

当 $x=5$时，$y=-12$，此时点 P 的坐标为$(5, -12)$.

故抛物线对称轴右边图象上有一点 $P(5，-12)$，使得∠PCO=∠BCO.

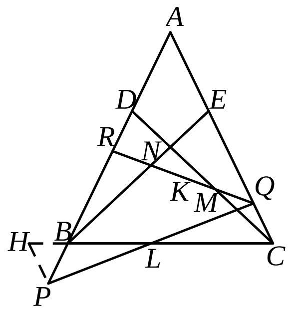
………………………………………………………………………………（25 分）

五、（本大题满分 25 分）

13、证明：

（1）过 P 作 PH 平行于 AC 交直线 BC 于点 H，连结 PH，BH。

则∠PHB=∠ACB=∠ABC=∠PBH，



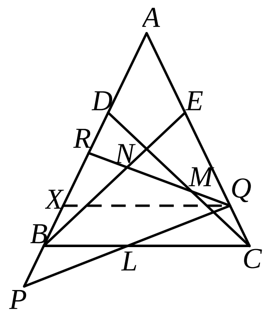
所以 $HP=BP=CQ$。 ……………………………………………（5 分）

又 $\angle HLP=\angle CLQ$，$\angle PHL=\angle QCL$，

所以 $\triangle HLP\cong\triangle CLQ$.

所以 $PL=LQ$. ……………………………………………………………………（10 分）

法二：过 Q 作 $QX\parallel BC$ 交 AB 于点 X，



所以 $\angle AQX=\angle ACB=\angle ABC=\angle AXQ$，

所以 $AX=AQ$。

故 $BX=CQ=BP$。 ……………………………………………………………（5 分）

又因为 $QX\parallel LB$，

所以 $PL=LQ$. ……………………………………………………………………（10 分）

（2）设直线 QR 交直线 DE 于点 S，交直线 BC 于点 T，

则 $\dfrac{DR}{RB}=\dfrac{DS}{BT}$， $\dfrac{CQ}{QE}=\dfrac{CT}{ES}$，

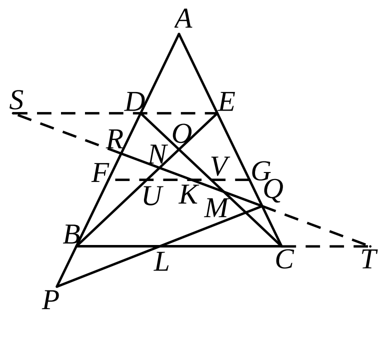
由 $DR=CQ$，$RB=QE$，

所以 $\dfrac{DS}{BT}=\dfrac{CT}{ES}$，即 $\dfrac{DS}{CT}=\dfrac{BT}{ES}$，

又 $\dfrac{DS}{CT}=\dfrac{DM}{CM}$， $\dfrac{BT}{ES}=\dfrac{BN}{EN}$，

所以 $\dfrac{DM}{CM}=\dfrac{BN}{EN}$，因此 $\dfrac{DM+CM}{CM}=\dfrac{BN+EN}{EN}$，

即 $\dfrac{CD}{CM}=\dfrac{BE}{EN}$。



由 $CD=BE$ 得 $CM=EN$. ……………………………………………………（20 分）

取 DB，EB 中点 F，G，连结 FG，分别交 BE、CD、QR 于 U、V、K，

因为 $FR=GQ$，由（1）的结论知 $RK=QK$。

设 BE 与 CD 交于点 O，则 $\triangle OUV$ 为等腰三角形。

由 $CM=EN$ 得 $NU=MV$.

由（1）的结论知 $NK=MK$。

所以 $MQ=NR$。 ……………………………………………………………………（25 分）