第二十四届"希望杯"全国数学邀请赛

初二　第2试试题

2013年4月14日　　上午9:00至11:00

一、选择题（每小题4分，共40分.）

1. 在无理数$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$中，介于$\frac{\sqrt{8}+1}{2}$与$\frac{\sqrt{26}+1}{2}$之间的数有(　　)

(A) 1个.　(B) 2个.　(C) 3个.　(D) 4个.

2. 已知$x+\frac{1}{x}=6(0<x<1)$，则$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$的值是(　　)

(A) $-\sqrt{5}$.　(B) -2.　(C) $\sqrt{5}$.　(D) 2.

3. 有3个正整数a,b,c，并且$a>b>c$. 从中任取2个，有3种不同的取法. 将每一种取法取出的2个数分别作和及作差，得到如下6个数：42，45，64，87，109，151. 则$a^2+b^2+c^2$的值是(　　)

(A) 12532.　(B) 12533.　(C) 12534.　(D) 12535.

4. 已知有理数a,b,x,y满足$ax+by=3$，$ay-bx=5$，那么$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$的值是(　　)

(A) 225.　(B) 75.　(C) 54.　(D) 34.

5. Among all the following points, which one is on the graph of function $y=x^2-2x-3$? (　　)

(A) $(1,-3)$.　(B) $(0,3)$.　(C) $(-1,0)$.　(D) $(-2,1)$.

（英汉词典：graph 图象；function 函数）

6. 下列命题中，正确的是(　　)

(A) 如果三角形三个内角的度数比是3∶4∶5，那么这个三角形是直角三角形.

(B) 如果直角三角形的两条直角边的长分别是a和b，那么斜边的长是a^2+b^2.

(C) 如果三角形三条边长的比是1∶2∶3，那么这个三角形是直角三角形.

(D) 如果直角三角形的两条直角边的长分别是a和b，斜边长是c，那么斜边上的高的长是$\frac{ab}{c}$.

7. 甲、乙、丙、丁4名跑步运动员的速度依次是v_1,v_2,v_3,v_4，且$v_1>v_2>v_3>v_4>0$，他们沿直跑道进行追逐赛的规则如下：

① 4人在同一起跑线上，同时同向出发；

② 经过一段时间后，甲、乙、丙同时反向，谁先遇到丁，谁就是冠军.

则(　　)

(A) 冠军是甲.　(B) 冠军是乙.　(C) 冠军是丙.　(D) 甲、乙、丙同时遇到丁.

8. 已知直线$y=kx+b(k\neq 0)$与x轴的交点在x轴的正半轴上，则(　　)

(A) $k>0,b>0$.　(B) $k<0,b<0$.　(C) $kb>0$.　(D) $kb<0$.

9. 如图1，函数$y_1=k_1x+b$和$y_2=k_2x$的图象交于点$(-1,-2)$，则关于x的不等式$k_1x+b>k_2x$的解集是(　　)

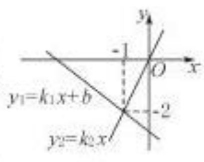

图1

(A) $x>-1$.　(B) $x<-1$.　(C) $x<-2$.　(D) $x>-2$.

10. 设 $q=mn$，$p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}$，其中 m，n 是两个连续的自然数($m<n$). 则 p(　　)

(A) 总是奇数.　　(B) 总是偶数.

(C) 有时是奇数，有时是偶数.　　(D) 有时是有理数，有时是无理数.

二、填空题(每小题 4 分，共 40 分.)

11. 已知 $a=\sqrt{5}+2$，$b=\sqrt{5}-2$，则 a^2+b^2+7 的平方根的值是__________.

12. 60 名学生参加英语测试，若优秀的学生占 45%，则在扇形统计图中，表示优秀的扇形的圆心角是__________度；若表示良好的扇形的圆心角是 120°，则良好的学生有__________人.

13. 若 x_1，x_2 都满足 $|2x-1|+|2x+3|=4$，且 $x_1<x_2$，则 x_1-x_2 的取值范围是__________.

14. 若直线 $y=2x+b$ 与坐标轴围成的三角形的面积是 4，则 $b=$__________.

15. 已知 a，b 都是有理数，若不等式 $(2a-b)x+3a-b<0$ 的解集是 $x>\frac{1}{4}$，则不等式 $(a+3b)x+a-2b>0$ 的解集是__________.

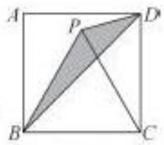

图 2

16. 如图2，点 P 在正方形 $ABCD$ 内，$\triangle PBC$ 是正三角形，若 $\triangle BPD$ 的面积是 $\sqrt{3}-1$，则正方形 $ABCD$ 的边长是__________.

17. 直线 $y=x-1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，点 C 在坐标轴上，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，则满足条件的点 C 有__________个.

18. 已知 $x^2-x-1=0$，则 $\frac{x^3+x+1}{x^4}=$__________.

19. 如图3，矩形纸片 $ABCO$ 平放在 xOy 坐标系中，将纸片沿对角线 CA 向左翻折，点 B 落在点 D 处，CD 交 x 轴于点 E. 若 $CE=5$，直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，则点 D 的坐标是__________.

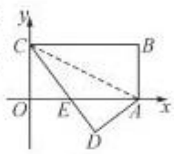

图 3

20. 已知正整数 x，y 满足 $\frac{5}{9}<\frac{y}{x}<\frac{3}{5}$，则 $x-y$ 的最小值是__________.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

已知 $m^2=n+2$，$n^2=m+2(m\neq n)$，求 $m^3-2mn+n^3$ 的值.

22. (本题满分 15 分)

As in Figure 4, both $\angle D=\angle E=90^\circ$ in trapezoid $ADEB$. $\triangle ABC$ is an equilateral triangle with C on DE. If $AD=7$ and $BE=11$, find the area of $\triangle ABC$.

(英汉词典：trapezoid 梯形；equilateral triangle 等边三角形；area 面积)

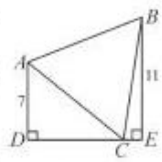

Fig. 4

23. (本题满分 15 分)

有 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，它们满足下列条件：

① 如果对于其中的任意一个整数 a_m，都有 $-a_m$ 不在这 n 个整数中，则称这 n 个整数满足性质 P；

② 若在这 n 个整数中选两个不同的整数 a_i，a_j，使它们成为一个有序整数对 (a_i,a_j)，并恰好 a_i+a_j 也在这 n 个整数中，则这样的整数对为"和整数对"；

③ 若在这 n 个整数中选两个不同的整数 a_i，a_j，使它们成为一个有序整数对 (a_i,a_j)，并恰好 a_i-a_j 也在这 n 个整数中，则这样的整数对为"差整数对".

回答下列问题：

(1) 3 个整数 $-1,2,3$ 是否满足性质 P？如果满足性质 P，请写出其中所有的"和整数对"和"差整数对"；

(2) 若 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$ 满足性质 P，其中"差整数对"有 k 个，试证明 $k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$；

(3) 若 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$ 满足性质 P，其中"和整数对"有 l 个，"差整数对"有 k 个，试证明 $l=k$.

第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

第2试 参考答案

初二

题号	1	2	3	4
答案	D	B	C	D
题号	5	6	7	8
答案	C	D	C	D
题号	9	10	11	12
答案	B	A	± 5	162；20
题号	13	14	15	16
答案	$-2 \leqslant X_1 - X_2 < 0$	± 4	$x > \frac{23}{47}$	2

题号	17	18	19	20
答案	7	1	$(\frac{24}{5}, -\frac{12}{5})$	3
题号	21	22	23	
答案	-2	$31\sqrt{3}$	详见下图	

23. (1) 因为 $1,-2,-3$ 都不在 $-1,2,3$ 这三个数中，所以 3 个整数 $-1,2,3$ 满足性质 P. 其中的“和整数对”有 $(-1,3)$ 和 $(3,-1)$；“差整数对”有 $(2,3)$ 和 $(2,-1)$. （5 分）

(2) $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$ 满足性质 P，它们一共可以组成 $n(n-1)$ 个有序整数对，即整数对中的第一个整数从 n 个整数中任意选，有 n 种方法，第二个整数从余下的 $n-1$ 个整数中任意选，有 $n-1$ 种方法，所以一共有 $n(n-1)$ 个不同的有序整数对.

如果整数对 (a_i,a_j) 是一个“差整数对”，即 a_i-a_j 也在这 n 个整数中，由性质 P 知道，a_j-a_i 一定不在这 n 个整数中，所以 (a_j,a_i) 不是“差整数对”.

由此可见，“差整数对”的个数 k 小于等于 $n(n-1)$ 的一半，即

$$k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}.$$

（10 分）

(3)$n(n\geqslant 2)$个整数$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$满足性质P,其中“和整数对”有l个.对于每一个“和整数对”(a_i,a_j),a_i+a_j也在这n个整数中,于是可以构造出一个“差整数对”(a_i+a_j,a_j).

对于另一个“和整数对”(a_u,a_v),a_u+a_v也在这n个整数中,因为$a_i=a_u$与$a_j=a_v$中至少有一个不成立,所以对应的“差整数对”(a_i+a_j,a_j)与(a_u+a_v,a_v)一定不相同,“和整数对”的个数l小于等于“差整数对”的个数k,即

$$l\leqslant k.$$

同理,对于每一个“差整数对”(a_i,a_j),a_i-a_j也在这n个整数中,于是可以构造出一个“和整数对”(a_i-a_j,a_j).

对于另一个“差整数对”(a_u,a_v),a_u-a_v也在这n个整数中,因为$a_i=a_u$与$a_j=a_v$中至少有一个不成立,所以对应的“和整数对”(a_i-a_j,a_j)与(a_u-a_v,a_v)一定不相同,“差整数对”的个数k小于等于“和整数对”的个数l,即

$$k\leqslant l.$$

综上所述,$k=l$成立.