第二十七届"希望杯"全国数学邀请赛

初一　　第 2 试试题

2016 年 4 月 10 日　　上午 9:00 至 11:00

一、选择题(每小题 4 分，共 40 分.)

1. 若 $3m+5$ 与 $m-1$ 互为相反数，则 $\frac{|m|}{2016}$ 的倒数是(　　)

(A) $\frac{1}{2016}$.　　(B) $-\frac{1}{2016}$.　　(C) 2016.　　(D) -2016.

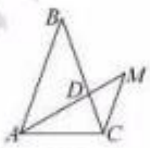


图 1

2. 如图 1，若 $AB=BC$，$\angle BAC=70^\circ$，$AD=BD$，$CM \parallel AB$ 交 AD 的延长线于点 M，则 $\angle M$ 的大小是(　　)

(A) 60°.　　(B) 70°.　　(C) 30°.　　(D) 40°.

3. 在一家水果店，小明买了 1 斤苹果，4 斤西瓜，2 斤橙子，1 斤葡萄，共付 27.6 元；小惠买了 2 斤苹果，6 斤西瓜，2 斤橙子，2 斤葡萄，共付 32.2 元. 则买 1 斤西瓜和 1 斤橙子需付(　　)

(A) 16 元.　　(B) 14.8 元.　　(C) 11.5 元.　　(D) 10.7 元.

4. 马小虎计算一个数乘以 8，再减 63，由于粗心，把乘号看成除号，减号看成加号，但得数是正确的. 这道题的正确得数是(　　)

(A) 36.　　(B) 56.　　(C) 63.　　(D) 65.

5. If the third number of five consecutive odd numbers is n, then the product of the five numbers is(　　)

(A) n^5-20n^3-64n.　(B) n^5-20n^3-64n.　(C) n^5+20n^3+64n.　(D) n^5+20n^3-64n.

(英汉小词典：the third number 第三个数；consecutive 连续的；odd number 奇数；product 乘积)

6. 将一张 1m×1m 的正方形白纸对折 8 次(每一次都沿平行于正方形边的方向对折)，那么所有折痕的长度的和最小是(　　)

(A) 32m.　　(B) 30m.　　(C) 16m.　　(D) 14m.

7. 若 x，y 都是有理数，则 $5x^2+4y^2-8xy+2x-4$ 的最小值是(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

8. 自然数 n 是两个质数的乘积，它的小于 n 的所有正因数的和等于 1000. 则 $n+22=$(　　)

(A) 1994.　　(B) 2005.　　(C) 2016.　　(D) 2027.

9. 三个内角的度数都是质数的三角形的种数(三个内角的度数对应相等的两个三角形视为一种)是(　　)

(A) 7.　　(B) 8.　　(C) 9.　　(D) 10.

10. 已知 $p=1\times2\times3\times\cdots\times20\times21=12^n\cdot M$，其中 M 是自然数，n 是使此等式成立的最大自然数，则(　　)

(A) M 是 2 的倍数，不是 3 的倍数.　　(B) M 是 3 的倍数，不是 2 的倍数.

(C) M 既是 2 的倍数，也是 3 的倍数.　　(D) M 既不是 2 的倍数，也不是 3 的倍数.

二、填空题(每小题 4 分，共 40 分.)

11. x、y、p、q 在数轴上的位置如图 2 所示，则点 $\left(\frac{x+1}{y},\frac{p+2}{q}\right)$ 在平面直角坐标系 xOy 的第__________象限.(填"一、二、三或四")

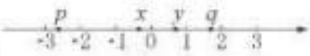


图 2

12. 若有理数 a、b、c、d 满足 $a+2b=c+2d=10$ 及 $ac+4bd=30$，则 $ad+bc=$__________.

13. 将一个正方形分成如图 3 所示的 6 个面积相等的长方形，则长方形 $ABCD$ 中，$AB:BC$ 的值是__________.

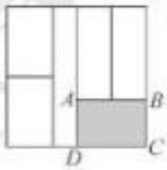


图 3

14. x、y、z 都是有理数，且 $xyz<0$，$x+y-z>0$，若 $a=\left(\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}\right)$，则 $a+a^2-a^3+\cdots+a^{1991}=$__________.

15. 如图 4，4 个小三角形的顶点处共有 6 个圆圈，若在这些圆圈中分别填入 6 个质数，它们的和是 20，且每个小三角形三个顶点处的数之和相等，则这 6 个圆圈中所填的数的积是__________.

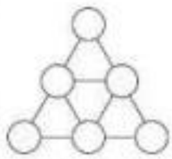


图 4

16. If $4x+3y=60$ and $7x+8y=61$, then the value of x^2-y^2 is __________.

17. 某四边形的两条边的长是 1 和 4，一条对角线的长是 2，并且这条对角线将四边形分为两个等腰三角形，则这个四边形的周长等于__________.

18. 若有理数 x、y 满足 $x^2+y^2-xy+2x-y+1=0$，则 $2016x+2017y$ 的值等于__________.

19. 如图 5，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 BC 的中点，点 E、F 是边 AC 的三等分点，AD 与 BE、BF 分别交于点 G、H，则 $AG:GH:HD=$__________.

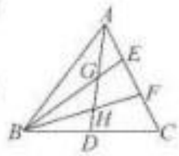


图 5

20. 在一列数中，$a_1=0$，$a_2=1$，从第 2 个数起，每个数的 3 倍等于这个数左右两个相邻的数之和，则这列数中的第 2016 个数被 6 除，所得的余数是__________.

三、解答题　每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

小欣跳绳 8 次，共跳 168 个，若她每次跳绳的个数是 18、20 或 24 中的一个，且每个数至少出现一次，问：她跳绳的个数是 20 个的有多少次？

22. (本题满分 15 分)

$\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，若 $\angle B\neq\angle C$，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的三个内角分别对应相等.

求证：$AD\cdot BC=AB\cdot AC$.

23. (本题满分 15 分)

是否存在正整数 x、y，使得 $x^2+y^2=2016$ 成立，若存在，请求出 x、y 的值；若不存在，请说明理由.

第二十七届“希望杯”全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

初一 第2试

一、选择题（每题4分。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	C	D	B	B	C	C	A	D

二、填空题（每题4分。）

题号	11	12	13	14	15
答案	四	35	3:2	−1	900
题号	16	17	18	19	20
答案	473	11	−2016	5:3:2	5

三、解答题

21 解：设：有x次跳绳的个数是18，有y次跳绳的个数是20，有z次跳绳的个数是24. 则

$$\begin{cases}x+y+z=8,\\18x+20y+24z=168,\end{cases}$$ （5分）

消去y，得 $x=2z-4$，

由题可知，$1\le x\le 6$，$2\le x+z\le 7$，且x,y,z均为整数

当$x=1$，$z=\frac{5}{2}$；(不合题意)

当$x=2$，$z=3$，$y=3$；其中$18\times2+20\times3+24\times3=168$,(符合题意)；

当$x=3$，$z=\frac{7}{2}$；(不合题意)； 当$x=4$，$z=4$；(不合题意)

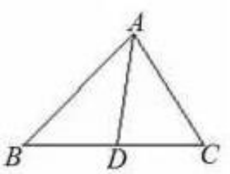
当$x=5$，$z=\frac{9}{2}$；(不合题意)； 当$x=6$，$z=5$；(不合题意)

综上可知，当$x=2$，$z=3$，$y=3$时符合题意，

所以她有3次跳绳的个数是20. （10分）

22. **证明**：由于△ABD与△ACD的角分别对应相等，由三角形外角定理，得

$\angle ADC>\angle ABC$，$\angle ADC>\angle BAC$，



所以只能 $\angle ADC=\angle ADB$，

但 $\angle ADC+\angle ADB=180^\circ$，

所以 $\angle ADC=\angle ADB=90^\circ$.

于是　　$AD \perp BC.$　　（5分）

由于　　$\angle B \neq \angle C,$

因此　　$\angle B = \angle CAD,$

$\angle C = \angle BAD.$

相加得　　$\angle B + \angle C = \angle CAD + \angle BAD = \angle BAC,$

但　　$\angle B + \angle C + \angle BAC = 180,$

所以　　$\angle BAC = 90^{\circ}.$

即　　$\triangle ABC$ 是直角三角形.　　（10分）

AD 为斜边 BC 上的高. 用两种方法计算直角三角形 ABC 的面积，得

$$\frac{1}{2}AD \cdot BC = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC.$$

所以　　$AD \cdot BC = AB\ A$　　（15分）

23. 证明：不存在正整数 x, y，使 $x^2 + y^2 = 2016$.　　（2分）

假设存在正整数 x，y，使 $x^2 + y^2 = 2016$ 成立.

因为　　奇数的平方是被4除余1的数，偶数的平方为4的倍数，

两个奇数的平方和为被4除余2的数，一个奇数的平方与一个偶数的平方之和是被4除余3的数，只有两个偶数的平方和是4的倍数，

而　　2016是4的倍数，

故　　2016是两个偶数的平方和.

即　　x, y 必同时为偶数.

不妨设 $x = 2a$，$y = 2b$.（a, b 为正整数）

则有　　$(2a)^2 + (2b)^2 = 2016$，

整理得　　$a^2 + b^2 = 504$ 成立.

同理，因为　　504是4的倍数，

故　　a, b 同时为偶数.

不妨设 $a = 2c$，$b = 2d$.（c, d 为正整数）

则有　　$(2c)^2 + (2d)^2 = 504$.

整理得 存在正整数 c, d　使得 $c^2 + d^2 = 126$ 成立.

因为　　126被4除余2，

故　　　　　c，d 必同时为奇数．　　　　　（10 分）

不妨设　　　　　$c \leqslant d$，

则　　　　　$c^2 \leqslant \frac{126}{2} = 63$，

故　　　　　c 只能取 1,3,5 和 7．

当 $c=7$ 时，$d^2=126-49=77$，而 77 不是完全平方数，故 d 非正整数；

当 $c=5$ 时，$d^2=126-25=101$，而 101 不是完全平方数，故 d 非正整数；

当 $c=3$ 时，$d^2=126-9=117$，而 117 不是完全平方数，故 d 非正整数；

当 $c=1$ 时，$d^2=126-1=125$，而 125 不是完全平方数，故 d 非正整数．

所以不存在正整数 c 和 d，使得 $c^2+d^2=126$ 成立．

所得矛盾表明，“存在正整数 x，y，使 $x^2+y^2=2016$”成立的假设不成立．

综上所述，不存在正整数 x, y，使得 $x^2+y^2=2016$ 成立．　　　　　（15 分）