第二十二届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题参考答案

（初中二年级组）

一、填空题（每小题 10 分，共 80 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$2\sqrt{6}$	2017	3	$3\sqrt{13}.$	29	16	$\frac{3}{4}$	200

二、解答下列各题（每小题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. **【答案】**$a+b+c$ 的值为-1，或 0 或 1.

【解答】由已知$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$

整理得 $\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+1\right]+\left[b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+1\right]+\left[c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+1\right]=0$

得$a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

所以$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0,$

故有：$a+b+c=0$或$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，则

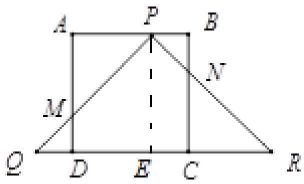
从而$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$，因此$a+b+c=\pm1.$

综上所述，$a+b+c$的值为0，1，-1.

注：$a=b=\frac{1}{\sqrt{6}},c=-\frac{2}{\sqrt{6}}$，$a+b+c=0$；$a=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$b=\frac{1-\sqrt{5}}{4},c=\frac{1}{2}$，$a+b+c=1$；

$a=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$b=\frac{\sqrt{5}-1}{4},c=-\frac{1}{2}$，$a+b+c=-1.$

10. 【答案】周长和是定值$2+\sqrt{2}$.



【解答】作$PE\perp QR$于E,在等腰直角三角形PQR中,QR的长为 2,所以$PE=1$.已知正方形$ABCD$,$AB//QR$,$BC\perp QR$,所以$BC=PE=1$,即正方形$ABCD$边长是 1. 所以$QD+CR=1$.由$\angle Q=\angle R=45°$,$\angle MDQ=\angle NCR=90°$,所以$\triangle MDQ$与$\triangle NCR$都是等腰直角三角形,所以$\triangle MDQ$与$\triangle NCR$的周长和是$2+\sqrt{2}$.

11. **【证明】**整数被 7 除的余数可以分为余 0,余±1,余±2,余±3 四类.

根据抽屉原理,这 5 个整数中一定有两个属于同一类,不妨设这两个数是$a=7m+r, b=7n+r'$.($r=0,\pm1$,±2,±3,r与r'相等或者互为相反数)

则$a^2-b^2=(7m+r)^2-(7n+r')^2=(7m-7n+r-r')(7m+7n+r+r')$

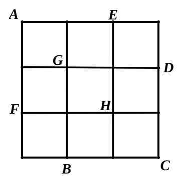
(1)这两个数除以 7 的余数相同,则$r-r'=0$,$a^2-b^2=7(m-n)(7m+7n+r+r')$,此时,7 整除$a^2-b^2$

(2)这两个数除以 7 的余数互为相反数,则$r+r'=0$,$a^2-b^2=7(m+n)(7m-7n+r-r')$,此时,7 整除$a^2-b^2$

所以$7\mid(a^2-b^2)$.即a^2-b^2是 7 的倍数.

12. **【答案】**38

【解答】令$n=a+b$.



(1)考虑$n=p^2m$,(其中p为质数,m为正整数)

取$a=pm$,$b=p^2m-pm$,则$ab=p^2m(pm-m)=(a+b)(pm-m)$,所以$\frac{ab}{a+b}=(p-1)m$,显然$(p-1)m$是正整数,所以$n=p^2m$都满足条件.

(2)考虑$n=p_1p_2p_3\cdots p_r$(其中$p_1,p_2,p_3,\cdots p_r$为两两不等质数)

由$n=a+b$,得$b=n-a$且$a<n$,所以$ab=a(n-a)=na-a^2$,设$\frac{ab}{a+b}=q$,所以$ab=nq$,故$na-a^2=nq$,整理得$a^2=na-nq=n(a-q)$,所以$n|a^2$,即$p_1p_2p_3\cdots p_r|a^2$,由$p_1,p_2,p_3,\cdots p_r$为两两不等质数,得$p_1p_2p_3\cdots p_r|a$,即$n\,|\,a$,所以$n\le a$,矛盾!

综合（1）（2），满足条件的 n 恰好为任意质数平方的整数倍.

考虑质数的平方小于 100 的有 2,3,5,7. 其中 4 的整数倍有 24 个，9 的整数倍有 11 个，25 的整数倍有 3 个，49 的整数倍有 2 个，重复的有 2 个，36 和 72，所以共计 38 个.

三、解答下列各题（每题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 【答案】 30°

【解答】在$\triangle BAF$ 和$\triangle DEF$ 中，

因为$\triangle AEF$ 和$\triangle BDF$ 为等边三角形，

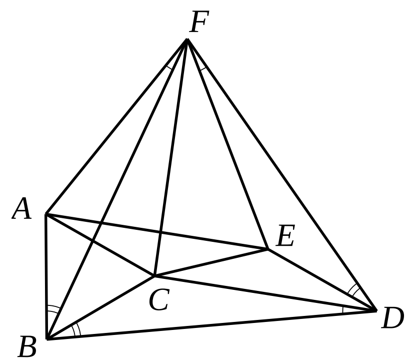
所以 $AF = EF$， $BF = DF$.

因为 $\angle AFB + \angle BFE = \angle DFE + \angle BFE = 60^\circ$，

所以 $\angle AFB = \angle DFE$.

所以$\triangle BAF \cong \triangle DFE$.

所以 $DE = AB$，且 $\angle EDF = \angle ABF$.



又因为$\triangle ABC$ 为正三角形，

所以 $DE = AC$.

同理可证$\triangle BAF \cong \triangle BCD$.

所以 $\angle AFB = \angle BDC$.

因为 $\angle ABF + \angle CBF = \angle CBD + \angle CBF = 60^\circ$，

所以 $\angle ABF = \angle CBD$.

所以 $\angle CDE = 60^\circ - (\angle ABF + \angle AFB)$.

所以三角形$\triangle CED$ 为等腰三角形，即 $CE = DE$.

在三角形$\triangle ACF$ 和$\triangle ECF$ 中，

因为 $AF = EF$， $CF = CF$， $AC = DE = CE$，

所以$\triangle ACF \cong \triangle ECF$.

所以 $\angle AFC = \angle CFE$.

所以 $\angle AFC = 30^\circ$.

14. 【答案】1000.

【解答】连接直线 a 上的点和直线 b 上的点，所得到的线段称为“正规线段”。分类

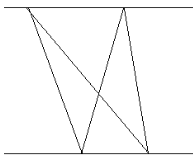
计数所得三角形个数：

第 1 类：三角形的三个顶点都在直线a和直线b上，

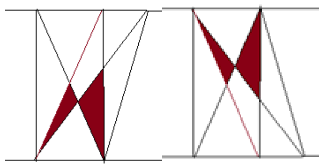
其中 2 个顶点在直线a上，第 3 个顶点在直线b上，这类三角形有：

$$\left(\frac{1}{2}\times5\times(5-1)\right)\times5=50\text{ 个，}$$

类似，其中 2 个顶点在直线 b 上，第 3 个顶点在直线 a 上，这类三角形也有 50 个；



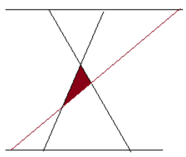
第 2 类：三角形的 2 个顶点在直线a和直线b上，第 3 个顶点为两条“正规线段”的交点，显然，这类三角形与直线 a 和直线 b 上的 4 个点有关，且各有 2 个点，构成 1 组，共有$\left(\frac{1}{2}\times5\times(5-1)\right)\times\left(\frac{1}{2}\times5\times(5-1)\right)=10\times10=100$组，每组可构成 4 个三角形，且各组之间无公共三角形时（见左图），则此类三角形最多有$4\times100=400$个；



第 3 类：三角形的 1 个顶点在直线a或者直线b上，另 2 个顶点为“正规线段”的交点，此类三角形与直线 a 和直线 b 上的 5 个点有关，且两条平行直线各有 3 个点和 2 个点，构成 1 组，共有

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times5\times(5-1)\right)\times\left(\frac{1}{2}\times5\times(5-1)\right)=2\times10\times10=200\text{ 组，}$$

每组构成 2 个三角形，且各组之间无公共三角形时（见图），则此类三角形最多有$2\times200=400$个三角形；



第 4 类：三角形的 3 个顶点都是“正规线段”的交点，此类三角形与直线 a 和直线 b 上的 6 个点有关. 其中三个点在a上，另外三个点在b上，构成 1 组，共有

$\left(\frac{1}{2}\times5\times(5-1)\right)\times\left(\frac{1}{2}\times5\times(5-1)\right)=10\times10=100$组，每组构成 1 个三角形，且各组无公共三角形时，最多有 100 个三角形。

综上，满足条件的三角形共有 100+400+400+100=1000 个.