姓名________ 年级________ 学校________ 准考证号________ 考场________

赛区________ 父母姓名________、________ 联系电话________、________

装 订 线

第 14 届世界奥林匹克数学竞赛（中国区）选拔赛

考生须知：

1. **每位考生将获得一份试卷。考试期间，不得使用计算工具或手机。**
2. **本卷共 120 分，选择题每小题 4 分，填空题每小题 5 分，解答题共 5 小题，共 50 分。**
3. **请将答案写在答题卡上。考试完毕时，试卷、答题卡及草稿纸会被收回。**
4. **若计算结果是分数，请化至最简。**

九年级全国总决赛初赛

（本试卷满分 120 分 ，考试时间 90 分钟）

一、**选择题**（每小题 4 分，共 40 分）

1. 一元二次方程 $x^2+1=0$ 的解是（　　）

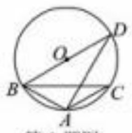
A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $x=1$ 或 -1　　D. 方程无实数根

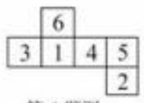
2. 对于抛物线 $y=x^2-m$，若 y 的最小值是 1，则 m 等于（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 如图，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，BD 为⊙O 的直径，$AB=3$，则 AD 的长为（　　）

A. 6　　B. $3\sqrt{5}$　　C. 5　　D. $3\sqrt{3}$


第 3 题图


第 4 题图


第 6 题图

4. 一个立方体玩具的展开图如图所示．任意掷这个玩具，落地后，上表面与底面上数字之和为偶数的概率是（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

5. 设 a、b 是方程 $x^2-12x+9=0$ 的两个根，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的值为（　　）

A. 18　　B. $\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\pm3\sqrt{2}$

6. 如图，⊙O 的半径为 2，AB、CD 是互相垂直的两条直径，点 P 是⊙O 上任意一点（P 与 A、B、C、D 不重合），过 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M，$PN\perp CD$ 于点 N，点 Q 是 MN 的中点，当点 P 沿着圆周转过 45°时，点 Q 走过的路径长为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

7. 已知二次函数 $y=2x^2+bx+1$，当 b 取不同的值时，其图象构成一个"抛物线系"，如图中的实线型抛物线分别是 b 取三个不同的值时二次函数的图象，它们的顶点在一条抛物线上（图中虚线型抛物线），则这条虚线型抛物线的解析式是（　　）

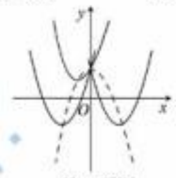
A. $y=-x^2+1$　　B. $y=-2x^2+1$　　C. $y=-\frac{1}{2}x^2+1$　　D. $y=-4x^2+1$

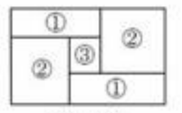
8. 给定一列按规律排列的数：1，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{8}{5}$，…，则这列数的第 2016 个数是（　　）

A. $\frac{2016}{2017}$　　B. $\frac{4032}{2017}$　　C. $\frac{4032}{2016}$　　D. $\frac{2017}{4032}$

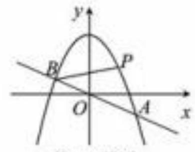
9. 如图，小明将一个长方形分割成 3 个正方形和 2 个长方形后仍是中心对称图形．若只知道原长方形的周长是 1，则分割后不用测量就能知道周长的图形的标号为（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②③


第 7 题图



第 9 题图


第 10 题图

10. 如图，已知直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{4}x^2+6$ 交于 A、B 两点，取与线段 AB 等长的一根橡皮筋，端点分别固定在 A、B 两处，用铅笔拉着这根橡皮筋使笔尖 P 在直线 AB 上方的抛物线上移动，动点 P 将与 A、B 构成无数个三角形，这些三角形中存在一个面积最大的三角形，其中最大的面积为（　　）

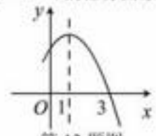
A. $12\sqrt{6}$　　B. $\frac{125}{2}$　　C. $\frac{125}{4}$　　D. $\frac{23}{4}$

二、**填空题**（每小题 5 分，共 30 分）

11. 将点 A（0，6）绕着原点顺时针旋转 60°得到点 B，则点 B 的坐标为____________．

12. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个相等的实数根，则 $2m^3-8mn+2016=$____________．

13. 抛物线 $y=-x^2+2x+k$ 的部分图象如图所示，则不等式 $-x^2+2x+k<0$ 的解集为____________．

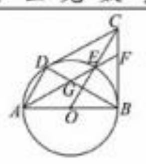

第 13 题图


第 15 题图

14. 已知 $-1<a<0$，化简 $\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}+\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}$ 得____________．

15. 如图，在半径为 2 的⊙O 中，有两个顶点重合的内接正四边形与正六边形，则阴影部分的面积为____________．

16. 如图，已知 AB 为⊙O 的直径，CD、CB 为⊙O 的切线，D、B 为切点，连结 AD、BD，OC 交⊙O 于点 E，AE 交 BD 于点 G，AE 的延长线交 BC 于点 F．给出以下结论：①$AD\parallel OC$；②点 E 为△CDB 的内心；③$FC=FE$；④$EG=EF$．其中正确的是________________（填序号）．



三、**解答题**（共 5 小题，共 50 分）

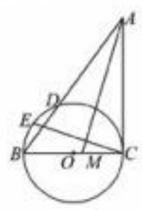
17. 已知 0 是关于 x 的一元二次方程（$a-2$）$x^2+x+a^2-4=0$ 的一个根，求 a 的值及方程的另一个根．（9 分）

18. 体育课上，小明、小强、小华三人在练习踢足球，足球从一人传到另一人就记为踢一次．

（1）如果从小强开始踢，踢了两次后，足球踢到了小华处的概率是多少（画树状图表示或列表说明）；（5 分）

（2）如果踢了三次后，要使球踢到了小明处的可能性最小，应从谁开始踢？画树状图说明．（5 分）

19. 如图，△ABC 中，$\angle ACB=90°$，以 BC 为直径的⊙O 交 AB 于点 D，E 为弧 BD 的中点，AM 平分 $\angle BAC$，求证：$AM\perp CE$．（9 分）



20. 小苏为了解某市交通拥堵情况，经统计分析，该市彩虹桥上的车流速度 v（千米/小时）是车流密度 x（辆/千米）的函数，当桥上的车流密度达到 220 辆/千米时，造成堵塞，此时车流速度为 0 千米/小时；当车流密度为 20 辆/千米时，车流速度为 80 千米/小时．研究表明：当 $20\le x\le 220$ 时，车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数．

（1）求彩虹桥上车流密度为 100 辆/千米时的车流速度；（5 分）

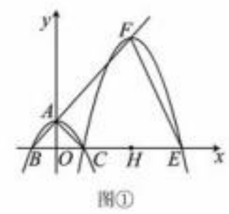
（2）当车流量 y（辆/小时）是单位时间内通过桥上某观测点的车辆数，即：车流量=车流速度×车流密度．当 $20\le x\le 220$ 时，求彩虹桥上车流量 y 的最大值．（5 分）

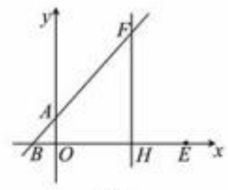
21. 如图①，抛物线 $y=ax^2+c$（$a\neq0$）与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于 B、C 两点（点 C 在 x 轴正半轴上），△ABC 为等腰直角三角形，且面积为 4，现将抛物线沿 BA 方向平移，平移后的抛物线过点 C 时，与 x 轴的另一交点为 E，其顶点为 F，对称轴与 x 轴的交点为 H．

（1）求 a、c 的值；（3 分）

（2）连接 OF，试判断△OEF 是否为等腰三角形，并说明理由；（4 分）

（3）现将一足够大的三角板的直角顶点 Q 放在直线 HF 上，一直角边始终过点 E，另一直角边与 y 轴相交于点 P，是否存在这样的点 Q，使以点 P、Q、E 为顶点的三角形与△POE 全等？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．（利用图②解答）（5 分）


图①


图②

第 14 届全国总决赛 9 年级初赛答案

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1.D　2.A　3.D　4.D　5.C　6.A　7.B　8.B　9.A　10.C

4.∵数字 3 与 4 相对，数字 1 与 5 相对，数字 2 与 6 相对，3+4=7，1+5=6，2+6=8，∴任意掷这个玩具，落地后，上表面与底面上数字之和为偶数的概率是 $\frac{2}{3}$.

5.由题意得 $a+b=12$，$ab=9$，故（$\sqrt{a}+\sqrt{b}$）$^2=a+b+2\sqrt{ab}=12+2\times\sqrt{9}=18$，而 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

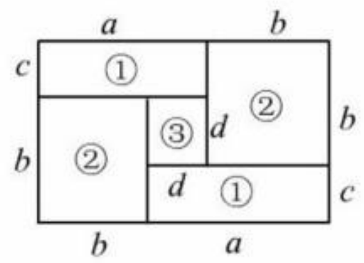
6.∵$PM\perp AB$ 于点 M，$PN\perp CD$ 于点 N，$AB\perp CD$，∴四边形 $ONPM$ 是矩形，又∵点 Q 为 MN 的中点，若连 OP，则点 Q 也为 OP 的中点，则 $OQ=1$，故点 Q 走过的路径长=$\frac{45\times\pi\times1}{180}=\frac{\pi}{4}$.

7.∵$y=2x^2+bx+1$ 的顶点坐标是（$-\frac{b}{4}$，$\frac{8-b^2}{8}$），设 $x=-\frac{b}{4}$，$y=\frac{8-b^2}{8}$，∴$b=-4x$，

∴$y=\frac{8-b^2}{8}=\frac{8-(-4x)^2}{8}=1-2x^2$. ∴所求抛物线的解析式为：$y=1-2x^2$.

8.把数列 1，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{8}{5}$，…，变为$\frac{2}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{6}{4}$，$\frac{8}{5}$，…，则第 n 个数为 $\frac{2n}{n+1}$，所以这列数的第 2016 个数是 $\frac{2\times2016}{2016+1}=\frac{4032}{2017}$.

9.如图，设图形①的长和宽分别是 a、c，图形②的边长是 b，图形③的边长是 d，∵原长方形的周长是 1，∴$1=2(a+2b+c)$，又根据图示可得 $\begin{cases}a=b+d\cdots(1),\\ b=c+d\cdots(2),\end{cases}$



（1）－（2）得：$a-b=b-c$，∴$2b=a+c$，

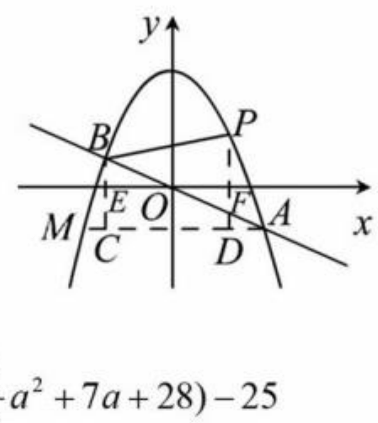
∴$1=2(a+2b+c)=2\times2(a+c)=4(a+c)$，或 $1=2(a+2b+c)=2\times4b=8b$，

∴$2(a+c)=\frac{1}{2}$，$4b=\frac{1}{2}$，∵图形①的周长是 $2(a+c)$，图形②的周长是 $4b$，$\frac{1}{2}$ 的值一定，∴图形①、②的周长是定值，不用测量就能知道，图形③的周长不测量就无法知道，∴分割后不用测量就能知道周长的图形的标号为①②.

10.联立直线和抛物线的解析式得：$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\ y=-\frac{1}{4}x^2+6,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x_1=6,\\ y_1=-3,\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-4,\\ y_2=2,\end{cases}$

∴A（6，－3），B（－4，2）．过点 A 作 $AM\parallel x$ 轴，交抛物线于点 M，作 $BC\perp AM$ 于点 C 交 x 轴于点 E，作 $PD\perp AM$ 于点 D，交 x 轴于点 F．∴C（－4，－3），∴$BC=5$，$AC=10$，

∴$S_{\triangle ABC}=25$，设 P（a，$-\frac{1}{4}a^2+6$），∴$PD=-\frac{1}{4}a^2+9$，$AD=6-a$，



∴$S_{\triangle PDA}=\frac{(6-a)(-\frac{1}{4}a^2+9)}{2}=\frac{1}{8}a^3-\frac{3}{4}a^2-\frac{9}{2}a+27$，

$S_{四边形BCDP}=\frac{(4+a)(-\frac{1}{4}a^2+9+5)}{2}=-\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}a^2+7a+28$，

∴$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle PDA}+S_{四边形BCDP}-S_{\triangle ABC}=\frac{1}{8}a^3-\frac{3}{4}a^2-\frac{9}{2}a+27+(-\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}a^2+7a+28)-25$

$=-\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{2}a+30=-\frac{5}{4}(a-1)^2+\frac{125}{4}$，∴当 $a=1$ 时，$S_{\triangle ABP}$ 的最大值为 $\frac{125}{4}$.

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

11.（$3\sqrt{3}$ ，3）　　12.2016　　13.x＜－1 或 x＞3　　14.$-\dfrac{2}{a}$　　15.$6-2\sqrt{3}$　　16.①②④

13.∵抛物线对称轴为直线 x=1，与 x 轴的一个交点为（3，0），∴抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为（－1，0），观察图象可知，不等式 $-x^2+2x+k<0$ 的解集为 x＜－1 或 x＞3.

14.因为 $-1<a<0$，所以 $\dfrac{1}{a}<-1<a$，即 $a-\dfrac{1}{a}>0$，$a+\dfrac{1}{a}<0$.

$$\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}+\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}$$

$$=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}+\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}=a-\frac{1}{a}-(a+\frac{1}{a})=-\frac{2}{a}.$$

15.如图，连接 OB、OF、OE，OE 与 CD 交于点 G，根据题意得：△BFO 是等边三角形，△CDE 是等腰直角三角形，且 OE 垂直平分 CD 和 BF．在△OBG 中，

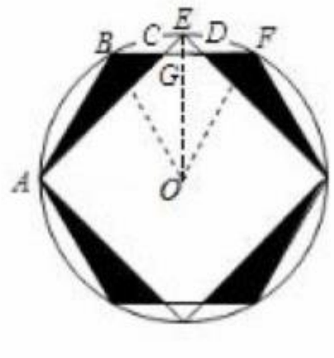
OB=2，∠OBF=60°，　∴∠BOG=30°，∴BG=1，OG=$\sqrt{3}$，

∴CD=2EG=2（OE－OG）=2（2－$\sqrt{3}$）=4－2$\sqrt{3}$.

∴$BC=\dfrac{1}{2}(BF-CD)=\dfrac{1}{2}$（2－4+2$\sqrt{3}$）=$\sqrt{3}$－1，

△ABC 的边 BC 上的高即为 OG 的长，

∴阴影部分的面积=4$S_{\triangle ABC}$=4×$\dfrac{1}{2}$（$\sqrt{3}-1$）•$\sqrt{3}$=6－2$\sqrt{3}$.



16.①连接 OD，DE，EB．CD 与 BC 是⊙O 的切线，易证得 △CDO≌△CBO，则∠DCO=∠BCO．故 OC⊥BD．∵AB 是直径，∴AD⊥BD，∴AD∥OC，故①正确；

②∵CD 是⊙O 的切线，∴∠CDE=$\dfrac{1}{2}$∠DOE，而∠BDE=$\dfrac{1}{2}$∠BOE，

∴∠CDE=∠BDE，即 DE 是∠CDB 的角平分线，同理可证得 BE 是∠CBD 的平分线，因此 E 为△CBD 的内心，故②正确；

③若 FC=FE，则应有∠OCB=∠CEF，应有

∠CEF=∠AEO=∠EAB=∠DBA=∠DEA，

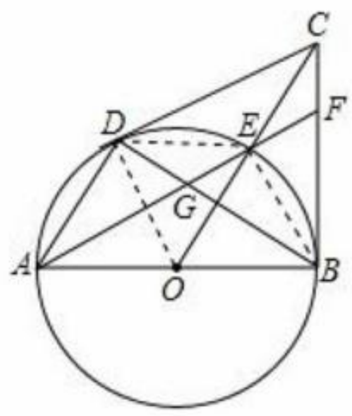
∴弧 AD=弧 BE，而弧 AD 与弧 BE 不一定相等，故③不正确；

④∵AB 是直径，∴∠AEB=90°，即 GF⊥BE.

又由②知，BE 是∠CBD 的平分线，

∴△GBE≌FBE（ASA），∴EG=EF．故④正确.

故答案是：①②④.



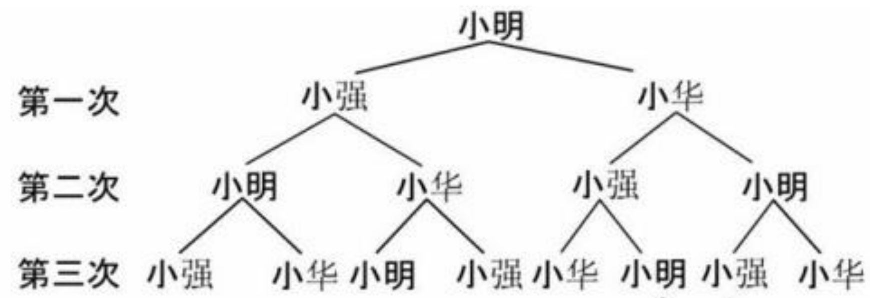
三、解答题（共 5 小题，共 50 分）

17.解：设方程的另一根为 b，则依题意得当 x=0 时，　$a^2-4=0$ 且 $a-2\neq0$，解得　a=－2．所以 $0+b=-\dfrac{1}{a-2}=-\dfrac{1}{-2-2}=\dfrac{1}{4}$，解得　b=$\dfrac{1}{4}$．综上所述，a 的值是－2，方程的另一根为$\dfrac{1}{4}$.

18.解：（1）如图：

∴P（足球踢到小华处）=$\dfrac{1}{4}$；

（2）应从小明开始踢，如下图所示：



若从小明开始踢，P（踢到小明处）$=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$，

同理，若从小强开始踢，P（踢到小明处）$=\dfrac{3}{8}$，

若从小华开始踢，P（踢到小明处）$=\dfrac{3}{8}$．

19.证明：连接 CD，如图，$\because E$ 为弧 BD 的中点，$\therefore \angle 2=\angle 3$，

$\because BC$ 为直径，$\therefore \angle BDC=90°$，

$\therefore \angle B+\angle 2+\angle 3=90°$，

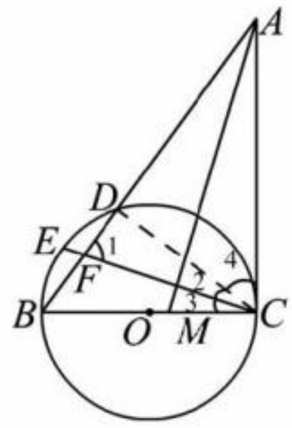
而$\angle 4+\angle 2+\angle 3=90°$，$\therefore \angle B=\angle 4$，

$\because \angle 1=\angle B+\angle 3$，

$\therefore \angle 1=\angle 4+\angle 3=\angle 4+\angle 2$，

$\therefore AF=AC$，

$\because AM$ 平分$\angle BAC$，$\therefore AM\perp CE$．



20.解：（1）设车流速度 v 与车流密度 x 的函数关系式为 $v=kx+b$，由题意，得

$\begin{cases}80=20k+b,\\0=220k+b,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}k=-\dfrac{2}{5},\\b=88,\end{cases}$ $\therefore$当 $20\le x\le 220$ 时，$v=-\dfrac{2}{5}x+88$，

当 $x=100$ 时，$v=-\dfrac{2}{5}\times 100+88=48$（千米/小时）．

（2）设车流量 y 与 x 之间的关系式为 $y=vx$，当 $20\le x\le 220$ 时，

$y=(-\dfrac{2}{5}x+88)x=-\dfrac{2}{5}(x-110)^2+4840$，$\therefore$当 $x=110$ 时，$y_{最大}=4840$，

$\therefore$当车流密度是 110 辆/千米，车流量 y 取得最大值是每小时 4840 辆．

21.解：（1）$\because$抛物线 $y=ax^2+c$（$a\neq 0$）与 y 轴交于点 A，$\therefore A$（0，c），$c>0$，则 $OA=c$，

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\therefore OA=OB=OC=c$，$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot c\cdot 2c=4$，解得 $c=2$（舍负），

$\therefore C$（2，0），$y=ax^2+2$，把 C（2，0）代入 $y=ax^2+2$ 中得：$4a+2=0$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$．

（2）$\triangle OEF$ 是等腰三角形．理由如下：如图①，设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

把 A（0，2）、B（-2，0）代入 $y=kx+b$ 中得$\begin{cases}b=2,\\-2k+b=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\b=2,\end{cases}$

则直线 AB 的解析式为 $y=x+2$．

设 F（t，$t+2$），$\because$抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$ 沿 BA 方向平移，平移后的抛物线过点 C 时，顶点为 F，$\therefore$可设平移后抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}(x-t)^2+t+2$，把 C（2，0）代入解析式可得

$-\dfrac{1}{2}(2-t)^2+t+2=0$，解得 $t_1=6$，$t_2=0$（舍去），$\therefore$平移后抛物线的解析式为

$y=-\dfrac{1}{2}(x-6)^2+8$，$\therefore F$（6，8），$\therefore OF=\sqrt{6^2+8^2}=10$．

$\because$对称轴与 x 轴的交点为 H，$\therefore CH=HE$，而 $OH=6$，$OC=2$，

$\therefore CH=4$，$HE=4$，$\therefore OE=4+6=10$，$\therefore OE=OF$，$\triangle OEF$ 为等腰三角形．

（3）存在．

情形一：当点 P 在 x 轴上方时，点 Q 的位置如图②所示．

此时△EQP≌△EOP，有 $EQ=EO=10$，而 $HE=10-6=4$，

∴$QH=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$，此时 Q 点的坐标为（6，$2\sqrt{21}$）；

情形二：当点 P 在 x 轴下方时，点 Q 的位置如图③所示．

此时△POE≌△EQP，有 $PQ=OE=10$，过 P 点作 $PK\perp HF$ 于点 K，则有 $PK=OH=6$，

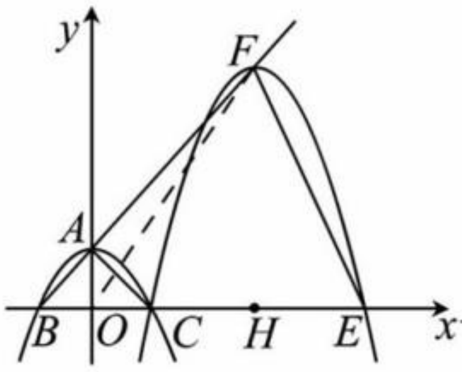
在 Rt△PQK 中，$QK=\sqrt{PQ^2-PK^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$．

设点 Q 的坐标为（6，y），∵△POE≌△EQP，∴$PO=EQ$，$PO^2=EQ^2$，

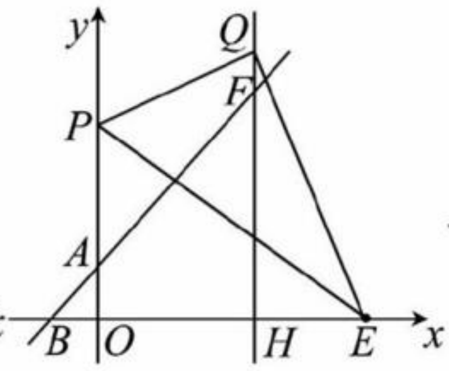
又 $PO=HK=8-y$，且在 Rt△QHE 中，$QE^2=y^2+16$，∴（$8-y$）$^2=y^2+16$，解得 $y=3$，

此时 Q 点的坐标为（6，3）．

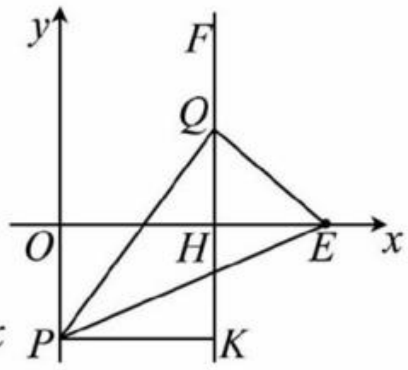
综上所述：Q 点的坐标为（6，$2\sqrt{21}$）或（6，3）．



图①



图②



图③