

# 第十届全国“华罗庚金杯”少年数学邀请赛

## 决赛试题：初一组

一. 填空(每题 10 分, 共 80 分)

1. ①计算:  $-13\frac{1}{2} \times (1\frac{1}{4} - 2\frac{11}{12}) \div (-0.5) \div \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times [(-2)^2 - 2^2] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

②已知:  $abc \neq 0$  且  $a+b+c=0$ , 则  $\frac{|a|b}{a|b|} + \frac{|b|c}{b|c|} + \frac{|c|a}{c|a|} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2.  $m$  和  $n$  均不为零,  $3x^2y^3$  和  $-5x^{2+2m+n}y^3$  是同类项, 则  $\frac{3m^3 - m^2n + 3mn^2 + 9n^3}{5m^3 + 3m^2n - 6mn^2 + 9n^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 由于浮力的作用, 金放在水里称量和它的重量比较, 在水中的“重量”会减少  $\frac{1}{19}$ ; 银放在水里

称量和它的重量相比较, 在水中的“重量”会减少  $\frac{1}{10}$ . 某个只含有金银成分的古文物, 重量是

150 克, 在水中称量, “重量”是 141 克, 则古文物中金占  $\underline{\hspace{2cm}}$  %.(精确到 1%)

4. 图 1 是几何学中非常著名的美丽的轴对称的图形, 它有  $\underline{\hspace{2cm}}$  条对称轴.

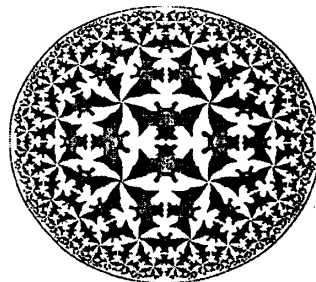


图 1

5. 甲加工一种零件, 乙加工另一种零件. 甲用 A 型机器需要 6 小时才能完成任务, 用 B 型机器效率降低 60%; 乙用 B 型机器需要 10 小时才能完成任务, 用 A 型机器效率提高 20%. 如果甲用 A 型机器, 乙用 B 型机器同时开始工作, 中途某一时刻交换使用机器, 甲和乙同时完成任务. 则甲完成任务所用的时间是  $\underline{\hspace{2cm}}$  小时.

6. 一个直角三角形三条边的长度是 3, 4, 5. 如果分别以各边为轴旋转一周, 得到三个立体, 那么三个立体中最大的体积和最小的体积的比是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 一列自然数 0, 1, 2, 3, …, 2005, …, 2024. 第一个数是 0, 从第二个数开始, 每一个都比它前一个大 1, 最后一个是 2004. 现在将这列自然数排成以下数表:

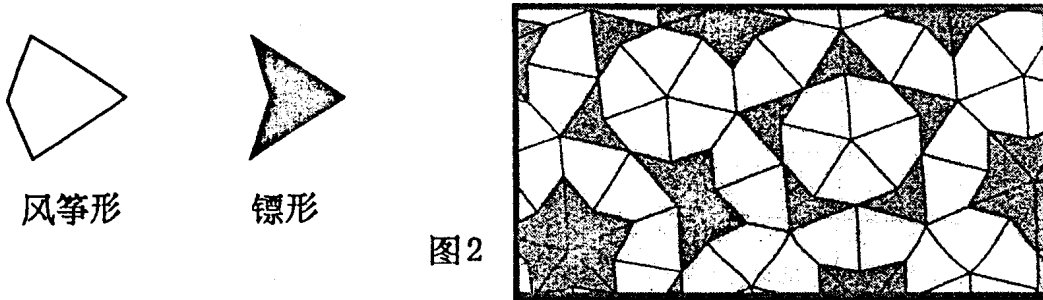
0	3	8	15	……
1	2	7	14	……
4	5	6	13	……
9	10	11	12	……
……	……	……	……	……

规定横排为行, 竖排为列, 则 2005 在数表中位于第  $\underline{\hspace{2cm}}$  行和第  $\underline{\hspace{2cm}}$  列.

8.  $(3m-1)x = 6x - 35$  是关于  $x$  的方程, 为确保该方程的解是负整数,  $m$  能取的最大值  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

二. 解答下列各题, 要求写出简要过程 (每题 10 分, 共 40 分)

9. 图 2 是由风筝形和镖形两种不同的砖铺设而成. 请仔细观察这个美丽的图案, 并且回答



风筝形砖和镖形砖的内角各是多少度?

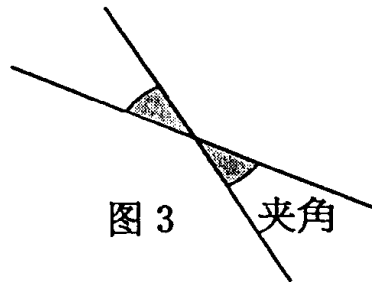
10. 已知:  $ax = by = cz = 1$ , 求  $\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4}$  的值.

11. 甲地需要粮食 90 吨, 乙地需要粮食 70 吨, 今丙地有粮食 100 吨, 丁地有粮食 60 吨. 由丙运往甲的每吨运费是丙运往乙每吨运费的 2 倍, 由丁运往甲的每吨运费是丁运往乙每吨运费的 1.5 倍, 由丙运往甲的每吨运费是丁运往甲每吨运费的 1.7 倍. 问怎样调运粮食, 才能使总运费最省?

12. 太平洋号和北冰洋号两艘潜艇在海下沿直线同向潜航, 北冰洋号在前, 太平洋号在后, 在潜航的某个时刻, 太平洋号发出声波, 间隔 2 秒后, 再次发出声波. 当声波传到北冰洋号时, 北冰洋号会反射声波. 已知太平洋号的航行速度是每小时 54 千米, 第一次和第二次探测到北冰洋号反射的回波的间隔时间是 2.01 秒, 声波传播的速度是每秒 1185 米, 问北冰洋号潜航的速度是每小时多少千米?(精确到每小时 1 千米)

三. 解答下列各题, 要求写出详细过程 (每题 15 分, 共 30 分)

13. 两条直线相交, 四个交角中的一个锐角或一个直角称为这两条直线的“夹角”(见图 3). 如果在平面上画  $L$  条直线, 要求它们两两相交, 并且“夹角”只能是  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$  之一, 问:



(1)  $L$  的最大值是多少?

(2) 当  $L$  取最大值时, 问所有的“夹角”的和是多少?

14. 将一个棱长分别为 36 厘米, 54 厘米和 72 厘米的长方体切割成一些大小相同, 棱长是整数厘米的正方体, 然后给这些正方体的表面涂色. 有一高为 14 厘米, 半径为 6 厘米圆柱体桶, 装满漆, 已知每立方厘米的这种漆可以涂色 72 平方厘米. 问: 将这个长方体最多能切割成多少个棱长相同的小正方体, 用这桶漆可以将它们全部染色体色?

# 第十届全国“华罗庚金杯”少年数学邀请赛

## 决赛试题答案，初一组

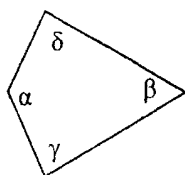
### 一. 填空 (每题 10 分, 共 80 分)

题号	答案	题号	答案
1	-80, -1	5	9
2	$\frac{55}{97}$	6	$\frac{5}{3}$
3	84%	7	20, 45
4	2	8	14

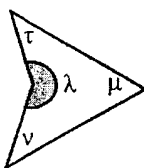
【评分参考】一题中有两空，每空5分。

### 二. 解答下列各题, 要求写出简要过程 (每题10分, 共40分)

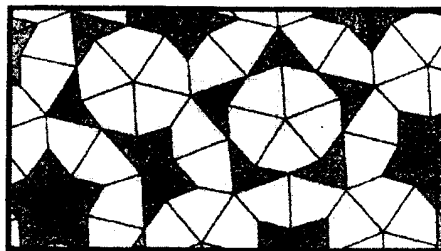
9 解:



风筝形



镖形



① 如图案所示,  $\gamma = \delta$ , 5 个风筝形组成一个正 10 边形, 所以,

$$\alpha = (10 - 2) \times 180 \div 10 = 8 \times 18 = 144 \text{ 度},$$

$$5\beta = 360 \text{ (度)}, \beta = 72 \text{ (度)}.$$

风筝形是个四边形, 内角和是 360 度, 所以,  $\gamma = (360 - 144 - 72) \div 2 = 72 \text{ (度)}$ .

② 如图案所示, 镖形中角  $\lambda$  和风筝形中的角  $\alpha$  组成圆周角, 角  $\nu$  和角  $\tau$  都是风筝形中的  $\alpha$  的补角, 所以

$$\lambda = 360 - 144 = 216 \text{ (度)}, \tau = \nu = 180 - 144 = 36 \text{ (度)}.$$

在图案中, 镖形和两个风筝形组成一个更大的风筝形, 所以,  $\mu = 72 \text{ (度)}$ .

答: 在风筝形中, 有一个是钝角, 是 144 度, 其它三个角都是 72 度。在镖形中, 有二个角相等, 是 36 度, 有一个角是优角, 是 216 度, 另一个角是 72 度。

【说明】在正式出版试题解答时, 将给出本题  $\gamma = \delta$ , 5 个风筝形拼成的图形是一个正 10 边形的严格的证明。

【评分参考】角度正确, 6 分; 理由正确, 4 分。

10 解答: 由已知条件,

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{1}{b}, \quad z = \frac{1}{c},$$

于是有,

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+\frac{1}{a^4}} = \frac{1}{1+a^4} + \frac{a^4}{a^4+1} = 1,$$

所以,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} \\ &= \left( \frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+x^4} \right) + \left( \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+y^4} \right) + \left( \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+z^4} \right) \\ &= 3. \end{aligned}$$

【评分参考】答案正确, 6分; 过程正确, 4分。

11 解答:

- ① 设丙运往甲  $x$  吨, 则丙运往乙  $(100-x)$  吨, 丁运往甲地  $(90-x)$  吨, 丁运往乙地  $60-(90-x) = (x-30)$  吨。设丙运往甲的每吨运费为  $c$ , 则丙运往乙的每吨运费为  $\frac{1}{2}c$ , 丁运往甲每吨运费  $\frac{10}{17}c$ , 丁运往乙每吨运费  $\frac{2}{3} \times \frac{10}{17}c$ ;

- ② 则整个的运费为:

$$\begin{aligned} & cx + \frac{1}{2} \times c(100-x) + \frac{10}{17} \times c(90-x) + \frac{2}{3} \times \frac{10}{17} c(x-30) \\ &= (50c + \frac{900}{17}c - \frac{200}{17}c) + (cx - \frac{1}{2}cx - \frac{10}{17}cx + \frac{20}{51}cx) \\ &= c \left( \frac{1550}{17} + \frac{31}{102}x \right); \end{aligned}$$

- ③ 设运费  $c$  不等于 0, 否则不论怎样调拨, 总运费为 0。设  $c > 0$ , 故  $x$  取值越小, 总费用越小。由于  $x-30 \geq 0$ , 故  $x \geq 30$ 。取  $x=30$  使总运费最少。

- ④ 调拨方案如下:

	运往甲	运往乙
由丙地	30 吨	70 吨
由丁地	60 吨	0 吨

【评分参考】①、②和③各 3 分, ④1 分。

12 解: 设太平洋号向北冰洋号第一次发出信号时, 两艘潜艇相距  $S$  米, 北冰洋号潜航的速度是每秒  $v$  米, 太平洋号的航行速度是每秒 15 米。则有:

- ① 从太平洋号第一次发出的声波传到北冰洋号的时间是  $\frac{S}{1185-v}$  (秒);
- ② 当第一个声波传到北冰洋号时, 两艘潜艇相距的距离是

$$S + \frac{S}{1185 - v} \times (v - 15) \text{ (米);}$$

③从太平洋号第一次发出声波到探测到第一个返回声波之间的时间是

$$\frac{S}{1185 - v} + \frac{S + \frac{S}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15} \text{ (秒);}$$

④当太平洋号第二次发出声波时，两艘潜艇相距的距离是  $S + 2 \times (v - 15)$  (米);

⑤类似，从太平洋号第二次发出声波到探测到第二个返回声波之间的时间是

$$\frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} + \frac{S + 2 \times (v - 15) + \frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15} \text{ (秒);}$$

⑥既然太平洋号第1次和第2次探测到北冰洋号反射的声波的间隔时间是2.01秒，则可列解方程：

$$2 + \frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} + \frac{S + 2 \times (v - 15) + \frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15}$$

$$- \frac{S}{1185 - v} - \frac{S + \frac{S}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15} = \frac{201}{100},$$

$$395 \times (v - 15) = 1185 - v$$

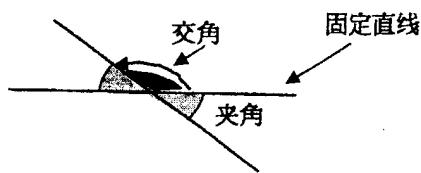
$$v = \frac{395}{22} = 17 \frac{21}{22} \text{ (米/秒)} = 64 \frac{10}{11} \text{ (千米/小时)} \approx 65 \text{ (千米/小时)}.$$

答：北冰洋号潜航的速度是每小时65千米。

【评分参考】：⑥正确，10分，计算错误，扣2分；⑥不正确，若①—⑤正确，5分。

### 三. 解答下列各题，要求写出详细过程(每题15分，共30分)

13 解：① 固定平面上一条直线，其它直线与此条固定直线的交角自这条固定直线起逆时针计算，只能是  $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $75^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $105^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $150^\circ$ 、 $165^\circ$  十一种角度之一，所以，平面上最多有12条直线。否则，必有两直线平行。



② 如右下图，将所有直线做平行移动，使它们交于同一个点，这样的平行移动显然不改变两条直线的“夹角”。不妨设其中一条直线水平，从水平直线开始，逆时针将12条直线分别记为第一条、第二条、……和第十二条直线。

(1) 第二条至第十二条直线与第一条直线的“夹角”和是：

$$15+30+45+60+75+90+75+60+45+30+15=540 \text{ (度)};$$

(2) 第三条至第十二条直线与第二条直线相交的“夹角”和是:

$$15+30+45+60+75+90+75+60+45+30=(540-15) \text{ (度)};$$

(3) 第四条至第十二条直线与第三条直线相交的“夹角”和是:

$$15+30+45+60+75+90+75+60+45=(540-15-30) \text{ (度)};$$

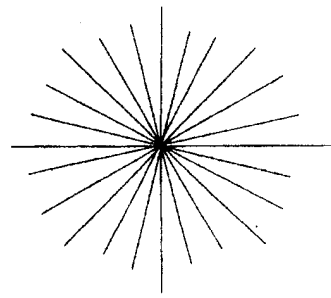
……;

(10) 第十一条和第十二条直线与第十条直线相交的“夹角”和是  $(30+15)$ (度);

(11) 第十二条直线与第十一条直线相交的“夹角”和是: 15 (度);

③ 将(2)和(11)、(3)和(10)、(4)和(9)、(5)和(8)、(6)和(7)配对, 得到所有的“夹角”之和是  $6 \times 540 = 3240$  (度)。

**【评分参考】:** 第 1 问答案正确, 给 5 分; 第 2 问中, 能完成②, 给 8 分; 能求出“夹角的总和, 即完成③, 给 2 分。



14 解:

① 求出这桶漆可以涂色  $14 \times 6^2 \times \pi \times 72$  平方厘米;

② 设切割出的小正方体的棱长是  $m$  厘米, 总的表面面积就是  $6m^2$  平方厘米,  $m$  应当是正整数; 长方体的体积是  $36 \times 54 \times 72$  立方厘米, 所切割出的小正方体是  $36 \times 54 \times 72 \div m^3$  个; 所有切割出的小正方体总的表面面积是

$$6m^2 \times 36 \times 54 \times 72 \div m^3 \text{ (平方厘米)};$$

③ 为了确保这桶漆可以将所有的小正方体的表面染上颜色, 应当有不等式:

$$14 \times 6^2 \times \pi \times 72 \geq 6m^2 \times 36 \times 54 \times 72 \div m^3;$$

解上面不等式:

$$14 \times 6^2 \times \pi \times 72 \geq 6 \times 36 \times 54 \times 72 \div m;$$

$$m \geq \frac{6 \times 36 \times 54 \times 72}{14 \times 36 \times \pi \times 72} = \frac{162}{7 \times \pi} > \frac{162}{7 \times 3.15}.$$

④ 因为  $m$  必须是 36、54 和 72 的公约数, 即所取的值只能是 1、2、3、6、9、18 之一。并且  $m$  的数值越小, 所切割出的正方体就越多。经验算,

$$9 > \frac{162}{7 \times \pi} > 6,$$

⑤ 所以,  $m=9$ ; 将长方体切割成一些棱长相同的小正方体的个数是

$$36 \times 54 \times 72 \div 9^3 = 192 \text{ (个)}.$$

答: 最多能将这个长方体切割成 192 个相同的、棱长是 9 厘米的正方体。

**【评分参考】:** 每步 3 分。