2005年“卡西欧杯”全国初中数学竞赛试题

（2005年4月10日　上午9：30－11：30）

答题时注意：1.用圆珠笔或钢笔作答.

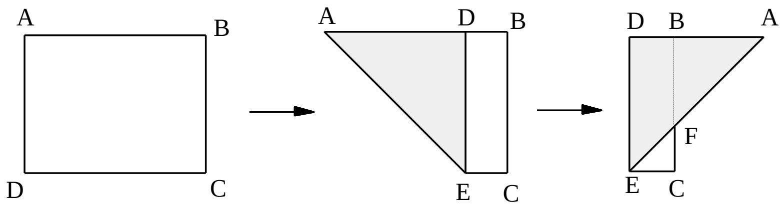
2.解答书写时不要超过装订线.

3.草稿纸不上交.

一、选择题（共5小题，每小题6分，满分30分.　以下每小题均给出了代号为A，B，C，D的四个选项，其中有且只有一个选项是正确的。请将正确选项的代号填入题后的括号里。不填、多填或错填均得零分）

1.如图，有一块矩形纸片ABCD，AB＝8，AD＝6.　将纸片折叠，使得AD边落在AB边上，折痕为AE，再将△AED沿DE向右翻折，AE与BC的交点为F，则△CEF的面积为（　　）

A.2　　B.4　　C.6　　D.8



2.若$M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$（x，y是实数），则M的值一定是（　　）

A.正数　　B.负数　　C.零　　D.整数

3.已知点I是锐角三角形ABC的内心，A_1，B_1，C_1分别是点I关于边BC，CA，AB的对称点.　若点B在△$A_1B_1C_1$的外接圆上，则∠ABC等于（　　）

A.30°　　B.45°　　C.60°　　D.90°

4.设$A=48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$，则与A最接近的正整数是（　　）

A.18　　B.20　　C.24　　D.25

5.设a，b是正整数，且满足$56\le a+b\le 59$，$0.9<\frac{a}{b}<0.91$，则b^2-a^2等于（　　）

A.171　　B.177　　C.180　　D.182

二、填空题（共5小题，每小题6分，满分30分）

6.在一个圆形时钟的表面，OA表示秒针，OB表示分针（O为两针的旋转中心）.　若现在时间恰好是12点整，则经过________秒钟后，△OAB的面积第一次达到最大.

7.在直角坐标系中，抛物线$y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2$（m＞0）与x轴交于A，B两点.　若A，B两点到原点的距离分别为OA，OB，且满足$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，则m的值等于________.

8.有两副扑克牌，每副牌的排列顺序是：第一张是大王，第二张是小王，然后是黑桃、红桃、方块、梅

花四种花色排列，每种花色的牌又按 A，2，3，…，J，Q，K 的顺序排列． 某人把按上述排列的两副扑克牌上下叠在一起，然后从上到下把第一张丢掉，把第二张放在最底层，再把第三张丢掉，把第四张放在最底层，……如此下去，直至最后只剩下一张牌，则所剩的这张牌是__________.

9.已知 D，E 分别是△ABC 的边 BC，CA 上的点，且 BD＝4，DC＝1，AE＝5，EC＝2． 连结 AD 和 BE，它们相交于点 P． 过点 P 分别作 PQ∥CA，PR∥CB，它们分别与边 AB 交于点 Q，R，则△PQR 的面积与△ABC 的的面积之比为________.

10.已知 x_1， x_2，…， x_{40} 都是正整数，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{40}=58$． 若 $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{40}^{\ 2}$ 的最大值为 A，最小值为 B，则 A＋B 的值等于________.

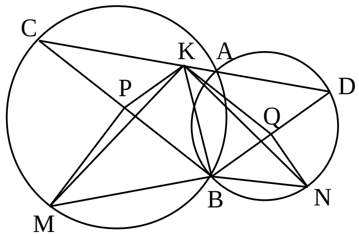
三、解答题（共 4 题，每小题 15 分，满分 60 分）

11.8 个人乘速度相同的两辆小汽车同时赶往火车站，每辆车乘 4 人（不包括司机）． 其中一辆小汽车在距离火车站 10km 的地方出现故障，此时距停止检票的时间还有 28 分钟． 这时惟一可利用的交通工具是另一辆小汽车，已知包括司机在内这辆车限乘 5 人，且这辆车的平均速度是 60km/h，人步行的平均速度是 5km/h.． 试设计一种方案，通过计算说明这 8 个人能够在停止检票前赶到火车站.

12.如图，半径不等的两圆相交于 A，B 两点，线段 CD 经过点 A，且分别交两圆于 C，D 两点． 连结 BC，BD，设 P，Q，K 分别是 BC，BD，CD 的中点，M，N 分别是弧 BC 和弧 BD 的中点． 求证：

（1）$\dfrac{BP}{PM}=\dfrac{NQ}{QB}$；

（2）△KPM∽△NQK



13.已知 p，q 都是质数，且使得关于 x 的二次方程 $x^2-(8p-10q)x+5pq=0$ 至少有一个正整数根，求所有的质数对（p，q）.

14.从 1，2，…，205 共 205 个正整数中，最多能取出多少个数，使得对于取出来的数中的任意三个数 a，b，c（$a<b<c$＝，都有 $ab\neq c$．

参考答案：1. A 2. A 3. C 4. D 5. B 6. $15\frac{15}{59}$ 7. 2 8. 方块6 9. $\frac{400}{1089}$ 10. 494

三、解答题（共4题，每小题15分，满分60分）

11．8个人乘速度相同的两辆小汽车同时赶往火车站，每辆车乘4人（不包括司机）. 其中一辆小汽车在距离火车站 10 km 的地方出现故障，此时距停止检票的时间还有 28 分钟. 这时惟一可利用的交通工具是另一辆小汽车，已知包括司机在内这辆车限乘5人，且这辆车的平均速度是 60 km/h，人步行的平均速度是 5 km/h. 试设计一种方案，通过计算说明这8个人能够在停止检票前赶到火车站.

解：【方案一】当小汽车出现故障时，乘这辆车的4个人下车步行，另一辆车将车内的4个人送到火车站，立即返回接步行的4个人到火车站. ………………………3分

设乘出现故障汽车的4个人步行的距离为 x km，根据题意，有

$$\frac{x}{5}=\frac{10+10-x}{60},$$ ………………………5分

解得 $x=\frac{20}{13}$. ………………………3分

因此这8个人全部到火车站所需时间为

$\frac{20}{13}\div 5+(10-\frac{20}{13})\div 60=\frac{35}{78}$（小时）$=26\frac{12}{13}$（分钟）

≈ 26.93（分钟）<28（分钟）.

故此方案可行. ………………………4分

【方案二】当小汽车出现故障时，乘这辆车的4个人先下车步行，另一辆车将车内的4个人送到某地方后，让他们下车步行，再立即返回接出故障汽车而步行的另外4个人，使得两批人员最后同时到达车站. ………………………3分

分析此方案可知，两批人员步行的距离相同，如图所示，D 为无故障汽车人员下车地点，C 为有故障汽车人员再次上车地点. 因此，设 $AC=DB=y$，根据题意，有

（第11题）

$$\frac{y}{5}=\frac{10-y+10-2y}{60},$$ ………………………5分

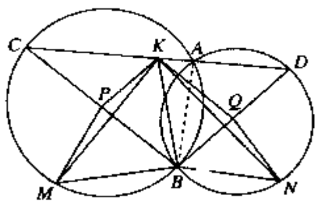
解得 $y=\frac{4}{3}$. ………………………3分

因此这8个人同时到火车站所需时间为

$\frac{4}{3}\div 5+(10-\frac{4}{3})\div 60=\frac{37}{90}$（小时）$=24\frac{2}{3}$（分钟）$\approx 24.67$（分钟）$<28$（分钟）.

故此方案也可行. ………………………4分

12．如图，半径不等的两圆相交于 A，B 两点，线段 CD 经过点 A，且分别交两圆于 C,D 两点．连结 BC，BD，设 P，Q，K 分别是 BC，BD，CD 的中点，M，N 分别是弧 BC 和弧 BD 的中点．求证：



（第 12 题）

（1）$\dfrac{BP}{PM}=\dfrac{NQ}{QB}$；　（2）$\triangle KPM\backsim\triangle NQK$.

证明：（1）因为 M 是弧 BC 的中点，P 是 BC 的中点，所以 $MP\perp BC$，$\angle BPM=90^{\circ}$，同理，$\angle NQB=90^{\circ}$．　……………………2 分

连结 AB，则

$$\angle PBM=\frac{1}{2}\angle CAB=\frac{1}{2}\left(180^{\circ}-\angle DAB\right)$$

$$=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle DAB=90^{\circ}-\angle NBD$$

$$=\angle QNB.$$　……………………2 分

所以，

$$\mathrm{Rt}\triangle BPM\backsim\mathrm{Rt}\triangle NQB,$$　……………………3 分

于是

$$\frac{BP}{PM}=\frac{NQ}{QB}.\qquad ①$$

……………………3 分

（2）因为 $KP\,/\!/\,BD$，且 $KP=\dfrac{1}{2}BD=BQ$，所以四边形 $PBQK$ 是平行四边形．于是 $BP=KQ$，$BQ=KP$，代入①，得

$$\frac{KQ}{PM}=\frac{NQ}{KP},$$　……………………3 分

又

$$\angle KPM=\angle KPB+90^{\circ}=\angle KQB+90^{\circ}=\angle NQK,$$

所以

$$\triangle KPM\backsim\triangle NQK.$$　……………………2 分

13．已知 p，q 都是质数，且使得关于 x 的二次方程 $x^2-(8p-10q)x+5pq=0$ 至少有一个正整数根，求所有的质数对（p，q）．

解：由方程两根的和为 $8p-10q$ 可知，若方程有一个根为整数，则另一个根也是整数．由方程两根的积为 $5pq$，知方程的另一个根也是正整数．　……………………2 分

设方程的两个正整数根分别为 x_1，x_2 $(x_1\le x_2)$，由根与系数的关系得

$$x_1+x_2=8p-10q,\qquad ①$$

$$x_1x_2=5pq\,. \qquad ②$$

由②得，x_1，x_2 有如下几种可能的情况：

$$\begin{cases}x_1=1,5,p,q,5p,5q,\\ x_2=5pq,pq,5q,5p,q,p,\end{cases}$$ ……………………3 分

所以，$x_1+x_2=5pq+1$，$pq+5$，$p+5q$，$q+5p$，……………………1 分

代入①：

当 $x_1+x_2=5pq+1$ 时，$5pq+1=8p-10q$，而 $5pq+1>10p>8p-10q$，故此时无解. ……………………2 分

当 $x_1+x_2=pq+5$ 时，$pq+5=8p-10q$，所以

$$(p+10)(q-8)=-85\,,$$

因为 p，q 都是质数，只可能

$$\begin{cases}q-8=-5,-1,\\ p+10=17,85,\end{cases}$$

所以（p，q）＝（7，3）. ……………………2 分

当 $x_1+x_2=p+5q$ 时，$p+5q=8p-10q$，所以，$7p=15q$，不可能.

……………………2 分

当 $x_1+x_2=5p+q$ 时，$5p+q=8p-10q$，所以，$3p=11q$，于是，

（p，q）＝（11，3）. ……………………2 分

综上所述，满足条件的质数对（p，q）＝（7，3）,或（11，3）.

……………………1 分

14．从 1，2，…，205 共 205 个正整数中，最多能取出多少个数，使得对于取出来的数中的任意三个数 a，b，c（$a<b<c$），都有 $ab\neq c$.

解：首先，1，14，15，…，205 这 193 个数，满足题设条件. ……………………5 分

事实上，设 a，b，c（$a<b<c$）这三个数取自 1，14，15，…，205．若 $a=1$，则 $ab=b<c$；若 $a>1$，则 $ab\geq 14\times 15=210>c$. ……………………3 分

另一方面，考虑如下 12 个数组：

（2，25，2×25），（3，24，3×24），…，（13，14，13×14），…………2 分

上述这 36 个数互不相等，且其中最小的数为 2，最大的数为 13×14＝182＜205.

所以，每一个数组中的三个数不能全部都取出来. ……………………2 分

于是，如果取出来的数满足题设条件，那么取出来的数的个数不超过

205－12＝193（个）.

综上所述，从 1，2，…，205 中，最多能取出 193 个数，满足题设条件. ……3 分