



总分	
----	--

第二十二届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题（初中一年级组）

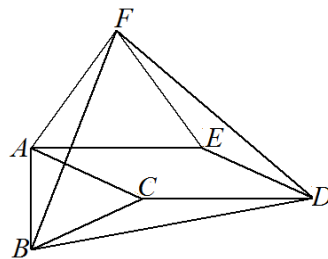
（时间：2017年3月11日 10:00~11:30）

一、填空题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 数轴上10个点所表示的数分别为 a_1, a_2, \dots, a_{10} ，且当 i 为奇数时，

$$a_{i+1} - a_i = 2, \text{ 当 } i \text{ 为偶数时, } a_{i+1} - a_i = 1, \text{ 那么 } a_{10} - a_6 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 如右图， $\triangle ABC$ ， $\triangle AEF$ 和 $\triangle BDF$ 均为正三角形，且 $\triangle ABC$ ， $\triangle AEF$ 的边长分别为3和4，则线段 DF 长度的最大值等于_____.



3. 如下的代数和

$$-1 \times 2016 + 2 \times 2015 - \dots + (-1)^m m \times (2016 - m + 1) + \dots + 1010 \times 1007$$

的个位数字是_____，其中 m 是正整数.

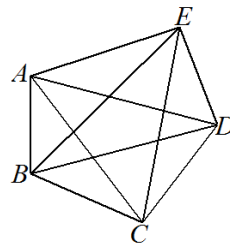
4. 已知 $2015 < x < 2016$. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，定义 $\{x\} = x - [x]$.

如果 $\{x\} \times [x]$ 是整数，则满足条件的所有 x 的和等于_____.

5. 设 x, y, z 是自然数，则满足 $x^2 + y^2 + z^2 + xy = 36$ 的 x, y, z 有_____组.

6. 设 $p, q, \frac{3p-1}{q}, \frac{q-1}{p}$ 都是正整数，则 $p^2 + q^2$ 的最大值等于_____.

7. 右图是 A, B, C, D, E 五个防区和连接这些防区的10条公路的示意图. 已知每一个防区驻有一支部队. 现在这五支部队都要换防，且换防时，每一支部队只能经过一条公路，换防后每一个防区仍然只驻有一支部队，则共有_____种不同的换防方式.



学校 _____ 姓名 _____ 参赛证号 _____
 密 封 线 内 请 勿 答 题

8. 下面两串单项式各有 2017 个单项式:

(1) $xy^2, x^4y^5, x^7y^8, \dots, x^{3n-2}y^{3n-1}, \dots, x^{6046}y^{6047}, x^{6049}y^{6050}$;

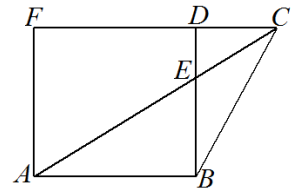
(2) $x^2y^3, x^7y^8, x^{12}y^{13}, \dots, x^{5m-3}y^{5m-2}, \dots, x^{10077}y^{10078}, x^{10082}y^{10083}$,

其中 n, m 为正整数, 则这两串单项式中共有 _____ 对同类项.

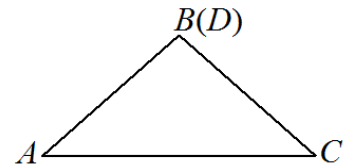
二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 是否存在长方体, 其十二条棱的长度之和、体积、表面积数值均相等? 如果存在, 请给出一个例子; 如果不存在, 请说明理由.

10. 如右图, 已知正方形 $ABDF$ 的边长为 6 厘米, $\triangle EBC$ 的面积为 6 平方厘米, 点 C 在线段 FD 的延长线上, 点 E 为线段 BD 和线段 AC 的交点. 求线段 DC 的长度.



11. 如右图, 先将一个菱形纸片沿对角线 AC 折叠, 使顶点 B 和 D 重合. 再沿过 $A, B(D)$ 和 C 其中一点的直线剪开折叠后的纸片, 然后将纸片展开. 这些纸片中菱形最多有几个? 请说明理由.



12. 证明: 任意 5 个整数中, 至少有两个整数的平方差是 7 的倍数.

三、解答下列各题 (每小题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 直线 a 平行于直线 b , a 上有 10 个点 A_1, A_2, \dots, A_{10} , b 上有 11 个点 B_1, B_2, \dots, B_{11} , 用线段连接 A_i 和 B_j ($i=1, \dots, 10, j=1, \dots, 11$), 所得到的图形中一条边在 a 上或者在 b 上的三角形有多少个?

14. 已知关于 x, y 的方程 $x^2 - y^2 + k = 2017$ 有且只有六组正整数解, 且 $x \geq y$, 求 k 的最大值.