第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

初一　　第 2 试试题

2014 年 4 月 13 日　　上午 9:00 至 11:00

竞赛结束时，参加竞赛的同学只交答题卡，试卷可带走。官方答案将在今日中午12:00，于“希望杯”官方网站及“希望杯”官方微博同时发布。5月初起可在“希望杯”官网查询获奖情况。

“希望杯”官网网址：http://www.hopecup.org

新浪微博
weibo.com/xiwangbei
@希望杯赛

一、选择题(每小题 4 分，共 40 分.以下每个题目的选择支中，仅有一个是正确的.)

1. 若有理数 a、b、c 两两不等，则 $\frac{a-b}{b-c}$，$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$ 中负数的个数是(　　)

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

2. 如果一个凸多边形的内角和等于外角和的 3 倍，那么，这个多边形的边数是(　　)

(A) 4.　　(B) 6.　　(C) 8.　　(D) 10.

3. The number of digits in the product $5^{39}\times 4^{22}$ is(　　)

(A) 41.　　(B) 47.　　(C) 51.　　(D) 61.

4. 若 $(a^{m}b^{n+2})\cdot(a^{2n}b^{2m})=a^{5}b^{3}$，则 $m+n$ 的值为(　　)

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) -3.

5. 如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCD>\angle CDA$，$AB>CB$. $\angle BCD$ 的平分线分别交 DA 的延长线、AB 于点 E、F，$\angle CDA$ 的平分线分别交 CB 的延长线、AB、CF 于点 H、G(不与点 F 重合)、P，则图中等腰三角形的个数是(　　)

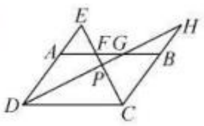

图 1

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.

6. 将 2013 表示成两个三位的正整数的平方的差，这两个三位数中较大的一个是(　　)

(A) 671.　　(B) 337.　　(C) 183.　　(D) 107.

7. 图 2、图 3、图 4 分别表示甲、乙、丙三人由 A 地到 B 地的路线图. 甲的路线：$A\to C\to D\to B$；乙的路线：$A\to E\to B$；丙的路线：$A\to F\to G\to H\to B$. 若三人行进的路线总长度分别用 $l_{甲}$、$l_{乙}$、$l_{丙}$ 表示，则其大小关系是(　　)

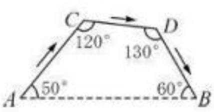

图 2

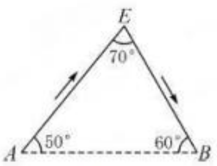

图 3

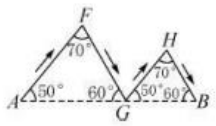

图 4

(A) $l_{甲}<l_{乙}<l_{丙}$.　(B) $l_{甲}<l_{乙}=l_{丙}$.　(C) $l_{乙}<l_{丙}<l_{甲}$.　(D) $l_{丙}=l_{乙}<l_{甲}$.

8. 已知 $p=3^{70}$，$q=5^{56}$，$r=6^{42}$，$s=17^{28}$. 这 4 个数中，最大的是(　　)

(A) p.　　(B) q.　　(C) r.　　(D) s.

9. 有砌放在一起的 5 个同样的正方体木块，其俯视图如图 5，则左视图的可能情况共有(　　)种.

(A) 4.　　(B) 3.　　(C) 2.　　(D) 1.

10. 水池 A 和 B 都是深 1.2 米，底部是 3 米 × 2 米的长方体. 1 号阀门 18 分钟可将无水的 A 池注满，2 号阀门 24 分钟可将 A 池中满池的水注入 B 池. 最初 A、B 均为空池，若同时打开 1 号，2 号阀门，当 A 池水深 0.4 米时，同时关闭两个阀门，这时 B 池中有水(　　)立方米.

(A) 0.9.　　(B) 1.8.　　(C) 3.6.　　(D) 7.2.

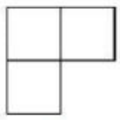

图 5

二、填空题(每小题 4 分，共 40 分.)

11. 光的速度近似为 1.08×10^9 千米/时. 若光从太阳到地球需要 8.3 分钟，则用科学记数法表示太阳与地球之间的距离，应当是__________千米.

12. 若正整数 a,b,c 满足 $a+2bc=\dfrac{49}{a}$，则 $a+b+c$ 的最大值是__________.

13. 一个等腰三角形的两条边长分别为 5 厘米和 10 厘米，则这个三角形的周长是__________厘米.

14. 已知 a,b,c 是有理数，且 $\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{ac}{a+c}=\dfrac{1}{12}$，则 $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}=$__________.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 所对应的外角分别是 $\angle1,\angle2,\angle3$，若 $\angle1=3\angle B$，$\angle2=4\angle C$，则 $\angle A$ 的度数是__________.

16. If x, y and z satisfy $x+y=5$ and $z^2=xy+y-9$, then the value of $2x+3y+4z$ is __________.

17. 如图 6，已知 $\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADE$，$\triangle AEF$ 都是等腰直角三角形. 若阴影部分的面积是 20 平方厘米，则 $\triangle BCD$ 与 $\triangle DEF$ 的面积和是__________平方厘米.

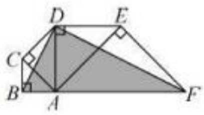

图 6

18. 某班学生不超过 50 人，其中有女生 a 人，男生 b 人，且满足 $\dfrac{4}{7}a=\dfrac{1}{2}b$，则该班最多有学生__________人.

19. 若正整数 a,b,c 满足 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{9}$，$\left(\dfrac{a+c}{b+9}\right)^2=\dfrac{4}{9}$，$a^2+b^2+c^2=49$，则 $b=$__________，$c=$__________.

20. 若 $a+b=4$，$a^2+b^2=12$，则 $a^5+b^5=$__________.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

如图 7，乙地是甲、丙两地的中点，A 从甲地，B 从丙地，C、D 从乙地分别沿图示的方向同时出发，若 A 出发后 70 分钟时遇到 C，84 分钟时遇到 B，140 分钟时追上 D，求 B 出发后多少分钟时遇到 D？追上 C？

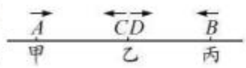

图 7

22. (本题满分 15 分)

将 1，2，3，…，15 这 15 个数分成两组，使第一组数的和与第二组数的平均数相等，求第一组中的数.

23. (本题满分 15 分)

已知 A、B、C、D、E 为平面内的 5 个点. $AB=8$ 厘米，$BC=2$ 厘米，$AD=5$ 厘米，$DE=1$ 厘米，$AC=10$ 厘米，$AE=6$ 厘米，CD 与 BE 交于点 F，$\triangle EAB$ 的面积为 24 平方厘米.

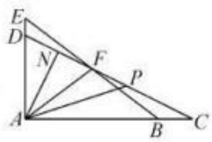

图 8

(1) 求证：$\angle EAC=90^\circ$；

(2) 求线段 AF 的长；

(3) 设 $\angle FAC$ 的平分线交 CD 于点 P，$\angle DAF$ 的平分线交 CD 于点 N，求证：$AN=PN$.

(可能用到的结论：如果直角三角形的两条直角边长分别为 a,b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.)

第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

初一　　第 2 试

一、选择题(每小题 4 分.)

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答　案	B	C	A	B	C	B	B	B	A	D

二、填空题(每小题 4 分,第 19 题每空 2 分.)

题　号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答　案	1.494×10^{8}	26	25	$\frac{1}{11}$	120°	13	10	45	3；6	464

三、解答题

21. 设甲、丙两地间的距离为 $2s$,A、B、C、D 的速度分别为 a、b、c、d,依题意,得

$$\begin{cases}84(a+b)=2s,\\70(a+c)=s,\\140(a-d)=s,\end{cases}\qquad (5\text{ 分})$$

即
$$\begin{cases}a+b=\dfrac{s}{42},\\a+c=\dfrac{s}{70},\\a-d=\dfrac{s}{140},\end{cases}$$

可得
$$\frac{s}{b-c}=105,\ \frac{s}{b+d}=60,$$

故 B 出发后 60 分钟时遇到 D,105 分钟时追上 C.　　(10 分)

22. 所给的 15 个数的和为

$$1+2+3+\cdots+15=120,$$

设第一组有 $n(1\leqslant n<15,n\in\mathbf{N})$ 个数,这 n 个数的和为 x(x 为正整数),

则第二组有 $15-n$ 个数,其和为 $120-x$,

第二组数的平均数是 $\dfrac{120-x}{15-n}$.　　(5 分)

依题意有　$x=\dfrac{120-x}{15-n}$,

得　$x=\dfrac{120}{16-n}$,

易知　$16-n$ 是 120 的约数,

其中　$1\leqslant n<15$,

$n=1,4,6,8,10,11,12,13,14$.　　(8 分)

当 $n=1$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=8$,

此时第一组仅有一个数 8,其余 14 个数在第二组,合于要求;

当 $n=4$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=10$,

此时第一组 4 个数的和是 10,仅有 $1+2+3+4=10$ 成立,所以第一组的数是 1,2,3,4,其余 11 个数在第二组,合于要求;

当 $n=6$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=12$,

而 6 个不同正整数的和的最小值是

$$1+2+3+4+5+6=21,$$

大于 12,所以这样的 x 取不到,分法不存在;

当 $n=8$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=15$,

而 8 个不同正整数的和的最小值是

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36,$$

大于 15,所以这样的 x 取不到,分法不存在;

当 $n=10$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=20$,

而 10 个不同正整数的和的最小值是 55,大于 20,所以这样的 x 取不到,分法不存在;

当 $n=11$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=24$,

而 11 个不同正整数的和的最小值是 66,大于 24,所以这样的 x 取不到,分法不存在;

当 $n=12$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=30$,

而 12 个不同正整数的和的最小值是 78,大于 30,所以这样的 x 取不到,分法不存在;

当 $n=13$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=40$,

而 13 个不同正整数的和的最小值是 91,大于 40,所以这样的 x 取不到,分法不存在;

当 $n=14$ 时,$x=\dfrac{120}{16-n}=60$,

而 14 个不同正整数的和的最小值是 105,大于

60，所以这样的 x 取不到，分法不存在.（13 分）

综上，满足条件的分组方法中第一组的数是 8，或是 1，2，3，4.（15 分）

23. (1) 由 $AD+DE=AE$，知

A、D、E 共线.

由 $AB+BC=AC$，知 A、B、C 共线.

从点 E 作 AB 的垂线 EH，垂足为 H，则由 $\triangle EAB$ 的面积为 24 平方厘米，得

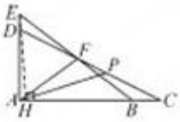

图 1

$$\frac{1}{2}EH \cdot AB=24,$$

即 $\quad 8EH=48$,

所以 $\quad EH=6=EA$.

故 $\quad A$ 点与 H 点重合，

因此 $\quad EA\perp AB$,

即 $\quad \angle EAC=90^\circ$.（5 分）

(2) 从点 F 分别作 AE、AC 的垂线，垂足分别是点 G、K. 设 $FG=x$ 厘米，$FK=y$ 厘米，则

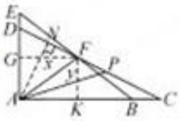

图 2

$$\begin{cases}S_{\triangle AEF}+S_{\triangle AFB}=S_{\triangle AEB},\\ S_{\triangle ADF}+S_{\triangle AFC}=S_{\triangle ADC},\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}6x+8y=48,\\ 5x+10y=50,\end{cases}$$

解得 $\quad x=4, y=3$.

在直角 $\triangle AFK$ 中，

$$AK=FG=4 \text{ 厘米}, FK=3 \text{ 厘米},$$

由 $AK^2+FK^2=AF^2$，得

$$AF^2=4^2+3^2=25,$$

所以 $\quad AF=5$（厘米）.（10 分）

(3) 由 $AD=AF=5$，

可得 $\angle ADF=\angle AFD$.

因为 AN 平分 $\angle DAF$，

所以 $\angle DAN=\angle FAN$，

于是 $$\angle ADF+\angle DAN$$
$$=\angle AFD+\angle FAN$$
$$=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ,$$

所以 $\quad \angle DNA=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

又因为 $\quad AP$ 平分 $\angle FAC$，

所以 $\quad \angle FAP=\angle CAP$，

于是 $$\angle NAP=\angle FAN+\angle FAP$$
$$=\angle DAN+\angle PAC$$
$$=\frac{1}{2}\angle EAC=45^\circ,$$

可得 $$\angle APN=180^\circ-\angle ANF-\angle NAP$$
$$=45^\circ,$$

所以 $\quad \angle NAP=\angle APN$，

故 $\quad AN=PN$.（15 分）