学校________ 姓名________ 参赛证号________

密 封 线 内 请 勿 答 题

第十六届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 B（初中组）

（时间: 2011 年 4 月 16 日 10:00～11:30）

一、填空题（每小题 10 分, 共 80 分）

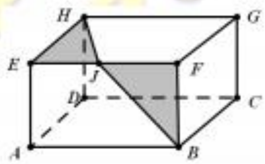
1. 公交车的线路号是由数字显示器显示的三位数, 其中每个数字是由横竖放置的七支荧光管显示, 如下图所示.

由于其中三支应该亮的荧光管不亮了, 某公交线路号显示成了“351”路, 则该公交线路号可能有______种.

2. 27 个正奇数的平均数, 精确到 0.1 是 15.9, 精确到 0.01 是______.

3. 从 2001~2011 这 11 个整数中, 选 3 个数使他们的和能被 3 整除, 则不同的选数法共有______种.

4. 如右图, 长方体中 J 为棱 EF 上一点, 三角形 EHJ 与三角形 JFB 的面积都是 50 平方厘米, 四边形 $BCGF$ 的周长为 24 厘米, 长方体的体积是______立方厘米.



5. 一水池有三个流量相同的注排两用水管, 开一个水管一个小时注排水 50 立方米. 假设先开一个进水管注满半池水, 再同时开三个进水管注满另一半池水; 排水时, 先用 $\frac{2}{3}$ 时间开三个水管同时排水, 再用 $\frac{1}{3}$ 时间只开一个水管排水, 把池中水排尽. 这样排完一池水所化时间比前面注满一池水少用 2 个小时. 水池的容积是______立方米.

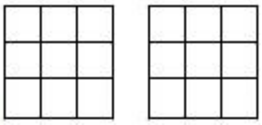
6. 有______个不同的整数 a, 使得 $\dfrac{a^2+4a-302}{a-17}$ 是正整数.

7. 用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, $\{x\}=x-[x]$, 则

$$\left\{\frac{5\times7\times1}{2011}\right\}+\left\{\frac{5\times7\times2}{2011}\right\}+\left\{\frac{5\times7\times3}{2011}\right\}+\cdots+\left\{\frac{5\times7\times2010}{2011}\right\}$$

的值等于______.

8. 在 3×3 的方格图内，填上适当的整数，就能使每一行、每一列和每条对角线上三个数之和都相等，此和记作 s．如果下列两个方格图中都要填上 -2, 0, 1 和 3 四个数，另外至少再加______个不同的整数，方能使得两个方格图的 s 不同.

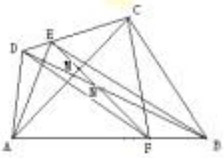


二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 求所有正整数 x, y，使得 x^2+3y 与 y^2+3x 都是完全平方数.

10. 一本书标有2011页，从第一页开始每 11 页就在最后一页的页面加注一个红圈，直到末页．然后从末页开始向前，每21页也在最前一页加注一个红圈，直到第一页．问一共有多少页加注了两个红圈，并写出它们的页面号码.

11. 如图，M, N 分别为四边形 $ABCD$ 对角线 AC、BD 的中点，过 M、N 的直线分别交 CD、AB 于 E、F．如果三角形 ABE 的面积为 45，求三角形 CDF 的面积.



12. 设 $S_1=|x_1|, S_2=|S_1-x_2|, \cdots, S_n=|S_{n-1}-x_n|$，将 $1, 2, 3, \cdots, 2011$ 这些数适当地分配给 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2011}$，使得 S_{2011} 尽量大，那么 S_{2011} 最大是多少？

三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 在△ABC 中，$\angle BAC=90°$, $AB=AC$, L 是过 A 的一条直线，$BD \perp L$ 于 D, $CE \perp L$ 于 E，给出 $BD=a$，$DE=b$，求 CE 的长度.

14. 设某年中有一个月里有三个星期日的日期为奇数，问这个月的 20 日可能是星期几？

第十六届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 B 参考答案（初中组）

一、 **填空题** (每小题 10 分，共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	11	15.89	57	1200	420	6	1005	4

二、**解答下列各题** (每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程)

9. 答案：所有解为(1，1)，(11，16)，(16，11)

解：若 $x=y\in\mathbf{N}^*$，且 x^2+3x 为完全平方数，

而 $(x+1)^2=x^2+2x+1\leqslant x^2+2x+x=x^2+3x<x^2+4x+4=(x+2)^2$.

∴ 当且仅当 $x=1$ 时等号成立，

∴ $x=y=1$；

若 $x>y$，则 $x^2<x^2+3<x^2+3y<x^2+3x<(x+2)^2$.

∴ $x^2+3y=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

∴ $3y=2x+1\Rightarrow 2x=3y-1=2y+y-1$，从而 $y-1=2k(k\in\mathbf{N}^*)$；此时有 $x=3k+1$.

$y^2+3x=(2k+1)^2+9k+3=4k^2+13k+4$.

∵ $(2k+2)^2=4k^2+8k+4<4k^2+13k+4<(2k+4)^2=4k^2+16k+16$.

∴ 只能有 $4k^2+13k+4=(2k+3)^2=4k^2+12k+9\Rightarrow k=5$.

∴ $x=16$，$y=11$.

∴ 所有解为$(x，y)=(1，1)$，$(11，16)$，$(16，11)$.

10. 答案：9

解：第一次从前向后加注红圈时，设加红圈的页面号码为 m，则

m=1 +1 1k ，k= 1, 2·; 3, m≤　　　　（1）

由　1+ 1k ≤ 2 0 1 1⇒　　2 0+1 1 =1 ·1· ，　1≤k≤182

第二次从后向前加注红圈时，由 $2011\div21=95\cdots16$，可知这时加红圈的页面号码 m 就是从第 16 页开始向后每隔 20 页加注红圈的页面号码，除了第 16 页和最末的一页（第 2011 页）是例外，于是第二次加注红圈的页面号码就是

$$m=16+21k',\quad k'=0,1,2,\cdots,94 \qquad (2)$$

结合（1）和（2）于是得到

m=1 +1 1k = 1 6+ 2 1 ⇒　1k1 (-k　=) 'k1 0+　1 5⇒ 'k

于是 $m=16+21\times4=100$ 是两圈重合的页面号码之最小者，注意到 11 和 21 的最大公约数 $[11,21]=231$，因此，两圈重合的页面号码一般是

$$m=100+231k,$$

由 $100+231k\le 2011\Rightarrow 0\le k\le 8$。

所以，两圈重合的页面有 9 页。

11. 答案：45

解：因为 M 是 AC 的中点，所以 A与C到EF 的距离相等，因此 $S_{\Delta AEF}=S_{\Delta CEF}$。

同理：$S_{\Delta BEF}=S_{\Delta DEF}$。

两式相加可得 $S_{\Delta ABE}=S_{\Delta CDF}$。

故三角形CDF 的面积是 45。

12. 答案：2010

解答：注意到任何非零正整数 x、y、z，总有$|x-y|$小于x并且小于y，即$|x-y|$小于$\{x,y\}$中最大值。$||x-y|-z|$小于$|x-y|$并且小于z，而$|x\text{-}y|$小于$\{x,y\}$中最大值，故$||x-y|-z|$小于$\{x,y,z\}$中最大值。所以有小于$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{2011}$中最大值。易知$S_{2011}$的奇偶性与和

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2011}=1+2+\cdots+2011=2011\times1006$的奇偶性相同，为偶数。

所以它不能等于 2011，最大可能为 2010。

另一方面，对于任意四个连续的自然数$n,n+1,n+2,n+3$，有

$|||n-(n+2)|-(n+3)|-(n+1)|=0$，故有

$$\overbrace{|\cdots|}^{2011个“|”}3-5|-6|-4|-\cdots|-(4k+3)|-(4k+5)|-(4k+6)|-(4k+3)|$$
$$-\cdots|2007|-2009|-2010|-2008|-2|-1|-2011|=2010$$

综上所述 $\overbrace{||\cdots||}^{2011个“|”}x_1-x_2|-x_3|-\ldots\ldots|-x_{2011}|$的最大值为 2010。

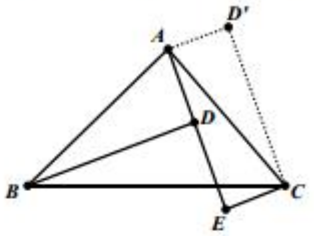
三、解答下列各题 (每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程)

第十六届华罗庚金杯少年数学邀请赛决赛试题 B 参考答案（初中组）

13. 答案： $|a-b|$

解答： 分两种情况：

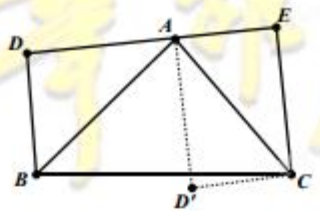
（1）B 和 C 分别在 L 的两侧，如下图。



三角形 ABD 绕 A 选择到 $AD'C$ 的位置，由$\angle ABD+\angle DAB=\angle DAB+\angle CAE=90^\circ$,知$\angle ABD=\angle CAE$， $\angle BAD+\angle CAE=\angle ACE+\angle CAE=90^\circ$, 知$\angle BAD=\angle ACE$, $AB=AC$, 所以四边形$AECD'$是长方形，那么 $AD=AD'=CE$, $BD=CD'=AE=AD+DE=CE+DE$.

a=CE+b， ∴CE=$|a-b|$

（2）B 和 C 分别在 L 一侧，如下图



类似于（1），可以得出：DE=DB+CE. b=CE+a， ∴CE=$|a-b|$

14. 答案： 3；5.

解答. 设这个月的第一个星期日是 a 日（$1\leqslant a\leqslant 7$）,则这个月内星期日的日期是

$7k+a$(k是整数,$7k+a\le 31$).要求有三个奇数。

当 $a=1$ 时，要使 $7k+a$ 是奇数，k 为偶数，即 k 可取 0,2,4 三个值，此时，

$$7k+a=7k+1=1,15,29$$

这时 20 号是星期五。

当 $a=2$ 时，要使 $7k+a$ 是奇数，k 为奇数，即 k 可取 1，3 两个值，$7k+a$ 不可能有三个奇数；

当 $a=3$ 时，要使 $7k+a$ 是奇数，k 为偶数，即 k 可取 0，2，4 三个值，此时

$$7k+a=7k+3=3,17,31$$

此时 20 号是星期三。

当 $4\le a\le 7$ 时，$7k+a$ 不可能有三个奇数。

因此，本月的三个星期日是 1 号，15 号和 29 号。于是本月 20 号是星期五.

注：2011 年五月就是这种情况。七月有 31 天，3 号，17 号，31 号是星期日.