# 2004年“*TRULY*®信利杯”全国初中数学竞赛试题

# 参考答案和评分标准

**一、选择题（共5小题，每小题6分，满分30分．以下每道小题均给出了代号为 A，B，C，D 的四个选项，其中有且只有一个选项是正确的．请将正确选项的代号填入题后的括号里．不填、多填或错填得零分）**

1. 已知实数 $a\neq b$，且满足 $(a+1)^2=3-3(a+1)$，$3(b+1)=3-(b+1)^2$．则 $b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为（　　）．

（A）23　　（B）$-23$　　（C）$-2$　　（D）$-13$

**答**：选（B）

∵　$a$、$b$ 是关于 $x$ 的方程

$$(x+1)^2+3(x+1)-3=0$$

的两个根，整理此方程，得

$$x^2+5x+1=0,$$

∵　$\Delta=25-4>0$，

∴　$a+b=-5$，$ab=1$.

故 $a$、$b$ 均为负数．因此

$$b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}=-\frac{b}{a}\sqrt{ab}-\frac{a}{b}\sqrt{ab}=-\frac{a^2+b^2}{ab}\sqrt{ab}=-\frac{(a+b)^2-2ab}{\sqrt{ab}}=-23.$$

2. 若直角三角形的两条直角边长为 $a$、$b$，斜边长为 $c$，斜边上的高为 $h$，则有（　　）．

（A）$ab=h^2$　　（B）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}$　　（C）$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$　　（D）$a^2+b^2=2h^2$

**答**：选（C）

∵　$a>h>0$，$b>h>0$，

∴　$ab>h^2$，$a^2+b^2>h^2+h^2=2h^2$；

因此，结论（A）、（D）显然不正确.

设斜边为 $c$，则有 $a+b>c$，$\frac{1}{2}(a+b)h>\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ab$，即有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{h},$$

因此，结论（B）也不正确.

由$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}h=\frac{1}{2}ab$化简整理后，得$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$，

因此结论（C）是正确的.

3．一条抛物线$y=ax^2+bx+c$的顶点为（4，$-11$），且与$x$轴的两个交点的横坐标为一正一负，则$a$、$b$、$c$中为正数的（　　）.

（A）只有$a$　　（B）只有$b$　　（C）只有$c$　　（D）只有$a$和$b$

**答**：选（A）

由顶点为（4，$-11$），抛物线交$x$轴于两点，知$a$>0.

设抛物线与$x$轴的两个交点的横坐标为$x_1$，$x_2$，即为方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的两个根.

由题设$x_1x_2<0$，知$\frac{c}{a}<0$，所以$c<0$.

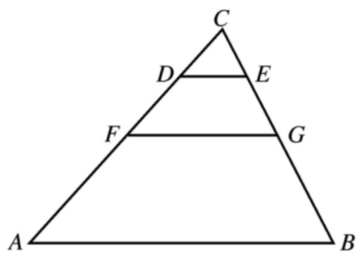
根据对称轴$x$=4，即有$-\frac{b}{2a}>0$，知$b$<0.

故知结论（A）是正确的.

4．如图所示，在△$ABC$中，$DE$∥$AB$∥$FG$，且$FG$到$DE$、$AB$的距离之比为1:2．若△$ABC$的面积为32，△$CDE$的面积为2，则△$CFG$的面积$S$等于（　　）.

（A）6　　（B）8

（C）10　　（D）12



（第4题图）

**答**：选（B）

由$DE$∥$AB$∥$FG$知，△$CDE$∽△$CAB$，△$CDE$∽△$CFG$，所以

$$\frac{CD}{CA}=\sqrt{\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta CAB}}}=\sqrt{\frac{2}{32}}=\frac{1}{4},$$

又由题设知$\frac{FD}{FA}=\frac{1}{2}$，所以

$$\frac{FD}{AD}=\frac{1}{3},$$

$$FD=\frac{1}{3}AD=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}AC=\frac{1}{4}AC,$$

故$FD=DC$，于是

$$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta CFG}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad S_{\Delta CFG}=8.$$

因此，结论（B）是正确的.

5．如果 $x$ 和 $y$ 是非零实数，使得

$$|x|+y=3 \text{和} |x|y+x^3=0,$$

那么 $x+y$ 等于（　　）．

（A）3　　（B）$\sqrt{13}$　　（C）$\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$　　（D）$4-\sqrt{13}$

**答**：选（D）

将 $y=3-|x|$ 代入 $|x|y+x^3=0$，得 $x^3-x^2+3|x|=0$.

（1）当 $x>0$ 时，$x^3-x^2+3x=0$，方程 $x^2-x+3=0$ 无实根；

（2）当 $x<0$ 时，$x^3-x^2-3x=0$，得方程 $x^2-x-3=0$

解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，正根舍去，从而 $x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

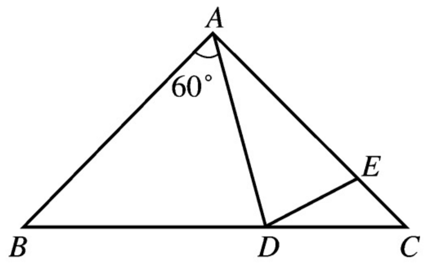
于是 $y=3-|x|=3+\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$.

故 $x+y=4-\sqrt{13}$.

因此，结论（D）是在正确的.

## 二、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

6． 如图所示，在△$ABC$ 中，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAD=60°$，则 $\angle EDC=$____（度）.




（第 6 题图）

**答**：30°

**解**：设 $\angle CAD=2\alpha$，由 $AB=AC$ 知

$\angle B=\dfrac{1}{2}(180°-60°-2\alpha)=60°-\alpha$，

$\angle ADB=180°-\angle B-60°=60°+\alpha$，

由 $AD=AE$ 知，$\angle ADE=90°-\alpha$，

所以 $\angle EDC=180°-\angle ADE-\angle ADB=30°$.

7．据有关资料统计，两个城市之间每天的电话通话次数 $T$ 与这两个城市的人口数 $m$、$n$（单位：万人）以及两城市间的距离 $d$（单位：km）有 $T=\dfrac{kmn}{d^2}$ 的关系($k$ 为常数)．现测得 $A$、$B$、$C$ 三个城市的人口及它们之间的距离如图所示，且已知 $A$、$B$ 两个城市间每天的电话通话次数为 $t$，那么 $B$、$C$ 两个城市间每天的电话通话次数为________次（用 $t$ 表示）.

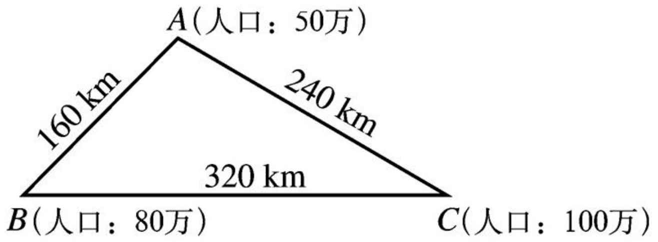
**答**：$\dfrac{t}{2}$

**解**：据题意，有$t=\dfrac{50\times 80}{160^2}k$，

$\therefore k=\dfrac{32}{5}t$.

因此，$B$、$C$两个城市间每天的电话通话次数为

$$T_{BC}=k\times\frac{80\times 100}{320^2}=\frac{32t}{5}\times\frac{5}{64}=\frac{t}{2}.$$




（第7题图）

8．已知实数$a$、$b$、$x$、$y$满足$a+b=x+y=2$，$ax+by=5$，则$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=$________.

**答**：$-5$

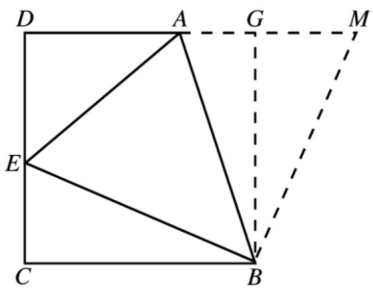
**解**：由$a+b=x+y=2$，得$(a+b)(x+y)=ax+by+ay+bx=4$，

$\because$ $ax+by=5$，

$\therefore$ $ay+bx=-1$.

因而，$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=(ay+bx)(ax+by)=-5$.

9．如图所示，在梯形$ABCD$中，$AD\,/\!/\,BC$ ($BC>AD$)，$\angle D=90^\circ$，$BC=CD=12$，$\angle ABE=45^\circ$，若$AE=10$，则$CE$的长为________.




（第9题图）

**答**：4或6

**解：**延长$DA$至$M$，使$BM\perp BE$. 过$B$作$BG\perp AM$，$G$为垂足. 易知四边形$BCDG$为正方形， 所以$BC=BG$. 又$\angle CBE=\angle GBM$，

$\therefore$ Rt$\triangle BEC\cong$Rt$\triangle BMG$.

$\therefore$ $BM=BE$，$\angle ABE=\angle ABM=45^\circ$，

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ABM$，$AM=AE=10$.

设$CE=x$，则$AG=10-x$，$AD=12-(10-x)=2-x$，$DE=12-x$.

在Rt$\triangle ADE$中，$AE^2=AD^2+DE^2$，

$\therefore$ $100=(x+2)^2+(12-x)^2$，

即$x^2-10x+24=0$，

解之，得$x_1=4$，$x_2=6$.

故 $CE$ 的长为 4 或 6.

10．实数 $x$、$y$、$z$ 满足 $x+y+z=5$，$xy+yz+zx=3$，则 $z$ 的最大值是__________.

**答：** $\frac{13}{3}$

**解：** $\because$ $x+y=5-z$，$xy=3-z(x+y)=3-z(5-z)=z^2-5z+3$，

$\therefore$ $x$、$y$ 是关于 $t$ 的一元二次方程

$$t^2-(5-z)t+z^2-5z+3=0$$

的两实根.

$\because$ $\Delta=(5-z)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0$，即

$$3z^2-10z-13\leq 0，(3z-13)(z+1)\leq 0.$$

$\therefore$ $z\leq\frac{13}{3}$，当 $x=y=\frac{1}{3}$ 时，$z=\frac{13}{3}$.

故 $z$ 的最大值为 $\frac{13}{3}$.

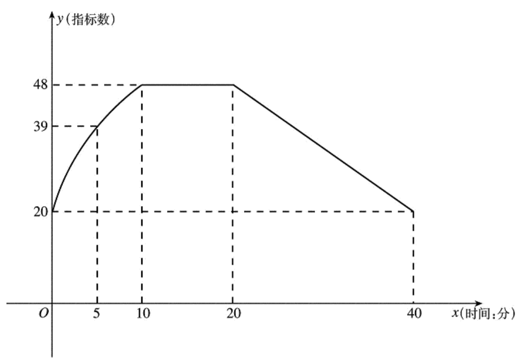
**三、解答题（共 4 题，每小题 15 分，满分 60 分）**

11．通过实验研究，专家们发现：初中学生听课的注意力指标数是随着老师讲课时间的变化而变化的，讲课开始时，学生的兴趣激增，中间有一段时间，学生的兴趣保持平稳的状态，随后开始分散. 学生注意力指标数 $y$ 随时间 $x$（分钟）变化的函数图象如图所示（$y$ 越大表示学生注意力越集中）. 当 $0\leq x\leq 10$ 时，图象是抛物线的一部分，当 $10\leq x\leq 20$ 和 $20\leq x\leq 40$ 时，图象是线段.

（1）当 $0\leq x\leq 10$ 时，求注意力指标数 $y$ 与时间 $x$ 的函数关系式；

（2）一道数学竞赛题需要讲解 24 分钟. 问老师能否经过适当安排，使学生在听这道题时，注意力的指标数都不低于 36.

**解：**（1）当 $0\leq x\leq 10$ 时，设抛物线的函数关系式为 $y=ax^2+bx+c$，由于它的图象经过点（0，20），（5，39），（10，48），所以



（第 11（A）题图）

$$\begin{cases}c=20,\\25a+5b+c=39,\\100a+10b+c=48.\end{cases}$$

解得，$a=-\frac{1}{5}$，$b=\frac{24}{5}$，$c=20$.

所以

$$y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{24}{5}x+20，\ 0\leq x\leq 10. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（5 分）$$

（2）当$20\le x\le 40$时，$y=-\frac{7}{5}x+76$.

所以，当$0\le x\le 10$时，令 $y$=36，得$36=-\frac{1}{5}x^2+\frac{24}{5}x+20$，

解得 $x$=4，$x=20$（舍去）;

当$20\le x\le 40$时，令 $y$=36，得$36=-\frac{7}{5}x+76$，解得

$$x=\frac{200}{7}=28\frac{4}{7}.$$ ………………………（10 分）

因为$28\frac{4}{7}-4=24\frac{4}{7}>24$，所以，老师可以经过适当的安排，在学生注意力指标数不低于 36 时，讲授完这道竞赛题. ………………………（15 分）

12．已知 $a$，$b$ 是实数，关于 $x$，$y$ 的方程组

$$\begin{cases} y=x^3-ax^2-bx, \\ y=ax+b \end{cases}$$

有整数解$(x,y)$，求 $a$，$b$ 满足的关系式.

**解**：将$y=ax+b$代入$y=x^3-ax^2-bx$，消去 $a$、$b$，得

$$y=x^3-xy,$$ ………………………（5 分）

$$(x+1)y=x^3.$$

若 $x$+1=0，即$x=-1$，则上式左边为 0，右边为$-1$不可能. 所以 $x$+1≠0，于是

$$y=\frac{x^3}{x+1}=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}.$$

因为 $x$、$y$ 都是整数，所以$x+1=\pm1$，即$x=-2$或$x=0$，进而 $y$=8 或$y=0$. 故

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ ………………………（10 分）

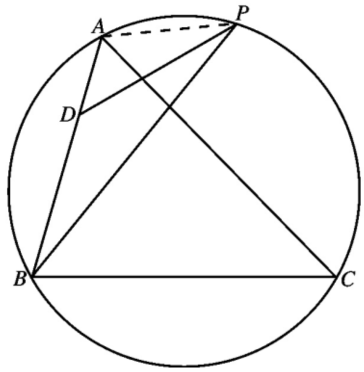
当$\begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$时，代入$y=ax+b$得，$2a-b+8=0$；

当$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$时，代入$y=ax+b$得，$b=0$.

综上所述，$a$、$b$ 满足关系式是$2a-b+8=0$，或者$b=0$，$a$ 是任意实数.

………………………（15 分）

13．$D$ 是△$ABC$ 的边 $AB$ 上的一点，使得 $AB$=3$AD$，$P$ 是△$ABC$ 外接圆上一点，使得 $\angle ADP=\angle ACB$，求 $\dfrac{PB}{PD}$ 的值.



（第 13（A）题图）

**解**：连结 $AP$，则 $\angle APB=\angle ACB=\angle ADP$，

所以，△$APB$∽△$ADP$，　　…………………………（5 分）

∴ $\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AP}{AD}$，

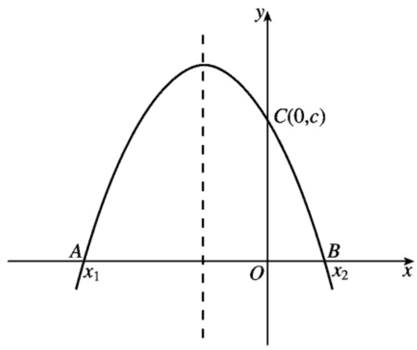
所以 $AP^2=AB\bullet AD=3AD^2$，

∴ $AP=\sqrt{3}AD$，　　…………………………（10 分）

所以 $\dfrac{PB}{PD}=\dfrac{AP}{AD}=\sqrt{3}$.　　…………………………（15 分）

14．已知 $a<0$， $b\le 0$， $c>0$，且 $\sqrt{b^2-4ac}=b-2ac$，求 $b^2-4ac$ 的最小值.

**解**：令 $y=ax^2+bx+c$，由 $a<0$， $b\le 0$， $c>0$，判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，所以这个二次函数的图象是一条开口向下的抛物线，且与 $x$ 轴有两个不同的交点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，因为 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1<0<x_2$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\le 0$，于是




$|x_1|=\left|\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=c$，　　………………（5 分）

所以 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}\ge c=\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ge -\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，　　…………………（10 分）

故 $b^2-4ac\ge 4$，

当 $a=-1$，$b$=0，$c$=1 时，等号成立.

所以，$b^2-4ac$ 的最小值为 4.　　…………………………（15 分）