

第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛



初三 第2试试题

2013年4月14日 上午9:00至11:00

竞赛结束时,只交答题卡,试卷可带走。答案于今日11:00在以下网站和微博公布:

“希望杯”官方网站: <http://www.hopecup.org>

“希望杯”微博: <http://e.weibo.com/xiawangbei>

《数理天地》官方网站: <http://www.mpw91.com>

《数理天地》微博: <http://e.weibo.com/shulitiandi>

未经“希望杯”组委会授权,任何单位和个人均不准翻印或销售此试卷,也不准以任何形式(包括网络)转载。

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 如图1,矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, AD=1$, 点 M 在边 DC 上, 若 AM 平分 $\angle DMB$, 则 $\angle AMD$ 的大小是()

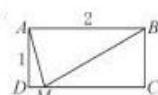


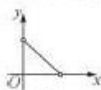
图1

- (A) 75° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 30° .

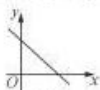
2. 化简 $\sqrt{7+2\sqrt{10}} - \sqrt{7-2\sqrt{10}}$, 得到的结果是()

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) $-2\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $-2\sqrt{3}$.

3. 一个矩形被直线分成面积为 x, y 的两部分, 则 y 与 x 之间的函数关系只可能是()



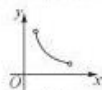
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 函数 $y = \frac{x-1}{x^2-x}$ 中, x 的取值范围是()

- (A) 0 以外的一切实数. (B) 0, -1 以外的一切实数.
(C) ± 1 以外的一切实数. (D) 0, ± 1 以外的一切实数.

5. 若将 $\sqrt{127}$ 写成小数, 则十分位上的数字是()

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

6. 代数式 $|x-2| + |x+5|$ ()

- (A) 有最小值, 没有最大值. (B) 有最大值, 没有最小值.
(C) 既有最小值, 也有最大值. (D) 既没有最小值, 也没有最大值.

7. 如图2, $\triangle ABC$ 中, $AB=2, BC=4, CA=3$, 平行于 BC 的直线 l 过 $\triangle ABC$ 的内心 I , 分别交边 AB, AC 于点 D, E , 则 $\triangle ADE$ 的周长是()

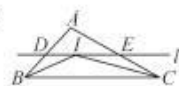


图2

- (A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

8. 若动点 $M(x, y)$ 与点 $A(2, \frac{3}{4})$ 的距离等于 M 到直线 $y = \frac{5}{4}$ 的距离, 则动点 M 的轨迹是()

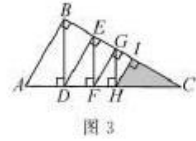
- (A) 双曲线. (B) 抛物线. (C) 双曲线的一支. (D) 一条直线.

9. 不等式 $|a| - \sqrt{\frac{1}{a^2}} > 0$ 的解是()

- (A) $a \neq 0$. (B) $a > 1$ 或 $a < -1$.
(C) $a > 1$ 或 $-1 < a < 0$. (D) $a > 0$ 或 $a < -1$.

10. 如图 3, $\triangle ABC$ 中, $AB=1, AC=2, \angle ABC=90^\circ$, 若 BD, EF, GH 都垂直于 AC, DE, FG, HI 都垂直于 BC , 则阴影 $\triangle HIC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 面积的比是()

- (A) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$, (B) $2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6$,
 (C) $\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^6$, (D) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^6$.



二、填空题(每小题 4 分, 共 40 分.)

11. 方程 $\sqrt{3-2x} + \sqrt{x} = 2$ 的根是_____.

12. 如果正 n 边形的一个外角是 5° , 那么 $n =$ _____.

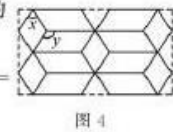
13. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 4x - p^2 + 2p + 2 = 0$ 的一个根为 p , 则 $p =$ _____.

14. 平面直角坐标系内, 一只跳蚤停在点 $(5, 0)$ 处, 它要跳到点 $(6, 0)$ 处, 它每一跳都是飞越 5 个长度单位, 并且总是跳到整点(坐标都是整数的点), 也不从原路返回, 那么, 当它跳到点 $(6, 0)$ 时, 至少跳了_____次.

15. 将一个圆分成三个相同的扇形, 将其中一个卷成圆锥, 锥顶对锥底圆周上任意两点的最大张角的余弦值是_____.

16. 将相同的平行四边形和相同的菱形镶嵌成如图 4 所示的图案, 设菱形中较小的内角为 x 度, 平行四边形中较大的内角为 y 度, 则 y 与 x 的关系式是_____.

17. $\triangle ABC$ 中, $AC=3, BC=5, \angle ACB=120^\circ$, 点 M 平分 AB , 则 $\tan \angle MCA =$ _____, $|MC| =$ _____.



18. 方程组 $\begin{cases} 2x + y = z - 1, \\ 8x^3 + y^3 = z^3 - 1 \end{cases}$ 的正整数解 (x, y, z) 是_____.

19. $\triangle ABC$ 的三条高依次是 $AD=6, BE=4, CF=3$, 则 $\cos C =$ _____, $\triangle ABC$ 的面积是_____.

20. 已知 $f(x)$ 是一个多项式, 若 $f(x)$ 除以 $(x-1)$, 余 5; 若 $f(x)$ 除以 $(x+2)$, 余 2, 则 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$, 得到的余式是_____.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

已知二次函数 $y = mx^2 + 6\sqrt{3}x + m + 4$ 的图象在直线 $y = -2$ 的上方, 求 m 的取值范围.

22. (本题满分 15 分)

一家商店销售某种计算器, 开始按定价(小于 200 元的整数元)售出, 后来按定价的六折售出, 当售出 200 台时, 共得款 30498 元, 问: 打折前, 按定价售出了多少台?

23. (本题满分 15 分)

设 $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 9} - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}}{x}$, ($x > 0$)

(1) 将 $f(x)$ 化成 $\frac{1}{\sqrt{g^2(x)+a} + \sqrt{g^2(x)+b}}$ (a, b 是不同的整数) 的形式;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 值.

第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

第2试 参考答案

初三

题号	1	2	3	4
答案	A	A	A	D
题号	5	6	7	8
答案	B	A	A	B
题号	9	10	11	12
答案	B	A	$x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 1$	72
题号	13	14	15	16
答案	1	3	$\frac{7}{9}$	$y = \frac{1}{2}x + 90$

题号	17	18	19	20
答案	$5\sqrt{3}; \frac{\sqrt{19}}{2}$	(1,3,6)	$-\frac{1}{4}, \frac{16}{5}\sqrt{5}$	$x+4$
题号	21	22	23	
答案	$m>3; \sqrt{15}$	91 台	详见下图	

23. (1) $f(x)$

$$= \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 9} - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 9} + \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 9} + \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}}$$

$$= \frac{(x^4 - 3x^2 + 9) - (x^4 - 4x^2 + 9)}{x(\sqrt{x^4 - 3x^2 + 9} + \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9})}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 9} + \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2 - 3)^2 + 3x^2} + \sqrt{(x^2 - 3)^2 + 2x^2}}{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 + 3} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 + 2}}.$$

(2) 当 $x = \frac{3}{x}$, 即 $x = \sqrt{3}$ 时,

$\sqrt{\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 + 3} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 + 2}$ 取得最小值 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$,

于是 $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

所以 $f(x)_{\max} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, 此时 $x = \sqrt{3}$.