考场________ 联系电话________ 准考证号________ 学校________ 父母姓名________ 年级________ 姓名________ 赛区________

装 订 线

第 14 届世界奥林匹克数学竞赛（中国区）选拔赛

考生须知：

1. 每位考生将获得考卷一份。考试期间，不得使用计算工具或手机。

2. 本卷共 120 分，选择题每小题 4 分，填空题每小题 5 分，解答题共 5 小题，共 50 分。

3. 请将答案写在答题卡上。考试完毕时，试卷、答题卡及草稿纸会被收回。

4. 若计算结果是分数，请化至最简。

八年级全国总决赛复赛

（本试卷满分 120 分 ，考试时间 90 分钟）

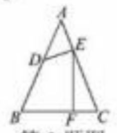
一、**选择题**（每小题 4 分，共 40 分）

1. 如果 $x^2-(m+1)x+1$ 是完全平方式，则 m 的值为（　　）

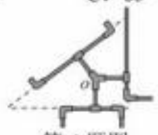
A. -1　　B. 1　　C. 1 或 -1　　D. 1 或 -3

2. 如图所示，在△ABC 中，$AB=AC$，过 AC 上一点 E 作 $DE\perp AC$，$EF\perp BC$，若 $\angle BDE=140°$，则 $\angle DEF$ 的度数为（　　）

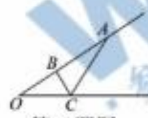
A. 55°　　B. 60°　　C. 65°　　D. 70°



第 2 题图



第 4 题图



第 5 题图

3. 已知 n 为正整数，$a^n=2$，则 $(2a^{4n})\div(a^3)^{2n}$ 等于（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{4}{3}$

4. 如图是某油路管道的一部分，延伸其中三条支路恰好构成一个直角三角形，其三边的长分别为 6m、8m 和 10m．输油中心 O 在到三条支路距离相等的地方，则中心 O 到三条支路的管道总长（计算时视管道为线，中心 O 为点）为（　　）

A. 24m　　B. 12m　　C. 10m　　D. 6m

5. 如图，从 A 点发出的光线，经 C 点反射后垂直地射到 B 点，然后按原路返回 A 点．若 $\angle AOC=33°$，$OC=1$，则光线所走的总路线最接近（　　）

A. 1.2　　B. 1.9　　C. 3.8　　D. 3

6. 英英沿商场里正在向下运动的自动扶梯从楼上走到楼下，用了 24 秒；若她站在自动扶梯上不动，从楼上到楼下要用 56 秒．若扶梯停止运动，她从楼上走到楼下需要用（　　）

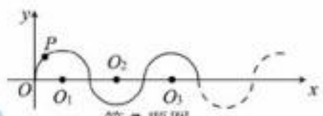
A. 32 秒　　B. 38 秒　　C. 42 秒　　D. 48 秒

7. 如图所示，在平面直角坐标系中，半径均为 1 个单位长度的半圆 O_1、O_2、O_3，… 组成一条平滑的曲线，点 P 从原点 O 出发，沿这条曲线向右运动，速度为每秒 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，则第 2016 秒时，点 P 的坐标是（　　）

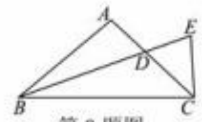
A. (2015，0)　　B. (2016，-1)　　C. (2016，1)　　D. (2016，0)

8. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle ABC=40°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，延长 BD 至点 E，使 $DE=AD$，则 $\angle ECA$ 的度数为（　　）

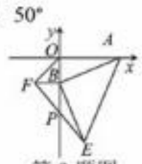
A. 30°　　B. 35°　　C. 40°　　D. 50°



第 7 题图



第 8 题图



第 9 题图

9. 如图，点 A 的坐标为（8，0），点 B 为 y 轴的负半轴上的一个动点，分别以 OB，AB 为直角边在第三、第四象限作等腰 Rt△OBF，等腰 Rt△ABE，连接 EF 交 y 轴于点 P，当点 B 在 y 轴上移动时，PB 的长度为（　　）

A. 2　　B. 3
C. 4　　D. PB 的长度随点 B 的运动而变化

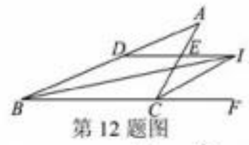
10. 对于任意正整数 n 都有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$，则 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}$ 等于（　　）

A. $\frac{37}{100}$　　B. $\frac{99}{100}$　　C. $\frac{33}{50}$　　D. $\frac{33}{100}$

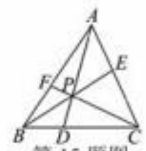
二、**填空题**（每小题 5 分，共 30 分）

11. 一个正 n 边形的每一个外角与其相邻内角的比是 1:3，则 $n=$__________.

12. 如图，在△ABC 中，BI、CI 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACF$，DE 过点 I，且 $DE\parallel BC$．$BD=8$cm，$CE=5$cm，则 DE 等于__________.



第 12 题图



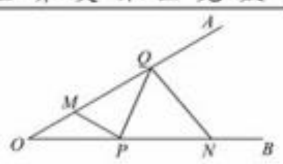
第 15 题图

13. 若关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-1}+\frac{3}{1-x}=1$ 的解是非负数，则 m 的取值范围是________.

14. 如果 a 是正整数，且 a^4-16a^2+100 是质数，那么 $a=$__________.

15. 如图，设 P 为△ABC 内任意一点，直线 AP、BP、CP 分别交 BC、CA、AB 于点 D、E、F，则 $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=$__________.

16. 如图，$\angle AOB=30°$，M，N 分别是边 OA，OB 上的定点，P，Q 分别是边 OB，OA 上的动点，如果记 $\angle AMP=\alpha$，$\angle ONQ=\beta$，当 $MP+PQ+QN$ 最小时，则 α 与 β 的数量关系是____________.

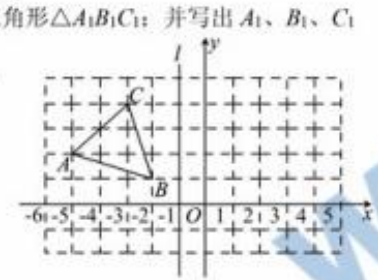


三、**解答题**（共 5 小题，共 50 分）

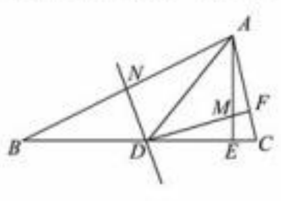
17. 在边长为 1 的小正方形组成的正方形网格中建立如图所示的平面直角坐标系，已知△ABC 的三个顶点都在正方形网格的格点上．

（1）画出△ABC 关于直线 l：$x=-1$ 的对称三角形△$A_1B_1C_1$；并写出 A_1、B_1、C_1 的坐标；（4 分）

（2）求六边形 $CAB\,B_1\,A_1\,C_1$ 的面积．（4 分）



18. 如图，在△ABC 中，$AE\perp BC$ 于点 E，$\angle B=22.5°$，AB 的垂直平分线 DN 交 BC 于点 D，交 AB 于点 N，$DF\perp AC$ 于点 F，交 AE 于点 M，求证：$EM=EC$．（10 分）



19. 是否存在整数 a、b、c 满足 $(\frac{9}{8})^a(\frac{10}{9})^b(\frac{16}{15})^c=2$？若存在，求出 a、b、c 的值；若不存在，说明理由．（10 分）

20. 京广高速铁路工程指挥部要对某路段工程进行招标，指挥部接到了甲、乙两个工程队的投标书．从投标书中得知：甲队单独完成这项工程所需天数是乙队单独完成这项工程所需天数的 $\frac{2}{3}$；若由甲队先做 10 天，剩下的工程再由甲、乙两队合作 30 天，可以完成整个工程．

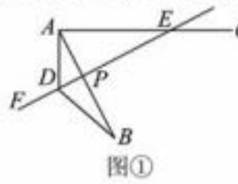
（1）求甲、乙两队单独完成这项工程各需多少天？（5 分）

（2）已知甲队每天的施工费用为 8.4 万元，乙队每天的施工费用为 5.6 万元．工程预算的施工费用为 500 万元．为缩短工期并高效完成工程，拟安排预算的施工费用是否够用？若不够用，需追加预算多少万元？请给出你的判断并说明理由．（5 分）

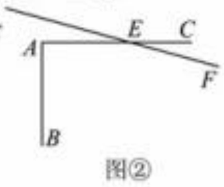
21. 已知：E 是线段 AC 上一点，$AE=AB$，过点 E 作直线 EF，在 EF 上取一点 D，使得 $\angle EDB=\angle EAB$，连接 AD．

（1）若直线 EF 与线段 AB 相交于点 P，当 $\angle EAB=60°$ 时，如图①，求证：$ED=AD+BD$；（6 分）

（2）若直线 EF 与线段 AB 不相交，当 $\angle EAB=90°$ 时，如图②，请先补全图形，线段 ED、AD、BD 依然满足（1）中的数量关系吗？若满足，请说明理由；若不满足，请写出新的数量关系，并证明你的结论．（6 分）



图①



图②

第 14 届全国总决赛 8 年级全国复赛答案

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1.D　2.C　3.C　4.D　5.C　6.C　7.D　8.C　9.C　10.D

6.设楼上到楼下的路程为 1，若扶梯停止运动，她从楼上走到楼下需要用 x 秒．则可列得方程为（$\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{56}$）$x$=1，解得 x=42．

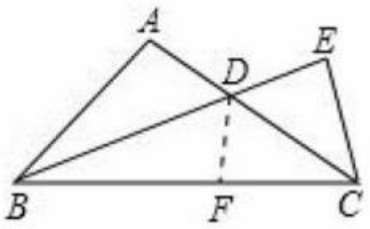
7.半径为 1 个单位长度的半圆的周长为：$\dfrac{1}{2}\times\pi\times 2=\pi$．

∵点 P 从原点 O 出发，沿这条曲线向右运动，速度为每秒 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度，

∴点 P 每秒走 $\dfrac{1}{2}$ 个半圆，当点 P 运动 1 秒时，P（1，1），当点 P 运动 2 秒时，P（2，0），当点 P 运动 3 秒时，P（3，−1），当点 P 运动 4 秒时，P（4，0），当点 P 运动 5 秒时，P（5，1），当点 P 运动 6 秒时，P（6，0），…

由观察可知，点 P 的横坐标与运动秒数相同，纵坐标以 1，0，−1，0 四个数为一组循环，又∵2016÷4=504，∴A_{2016} 的坐标是（2016，0）．

8.在 BC 上截取 $BF=AB$，连 DF，则有△ABD≌△FBD（SAS），



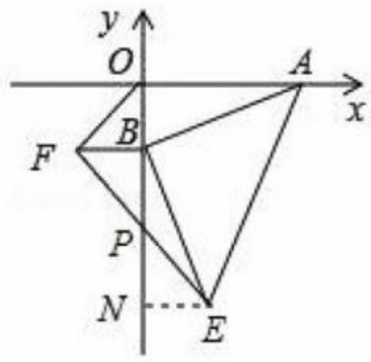
∴$DF=DA=DE$，又∵∠ACB=∠ABC=40°，∴∠A=100°=∠DFB，

∠DFC=180°−∠DFB=80°，∴∠FDC=60°，

∵∠EDC=∠ADB=180°−∠ABD−∠A=180°−20°−100°=60°，

∴△DCE≌△DCF（SAS），故∠ECA=∠DCB=40°．

9.如图，作 $EN\perp y$ 轴于点 N，∵∠ENB=∠BOA=∠ABE=90°，



∴∠OBA+∠NBE=90°，∠OBA+∠OAB=90°，∴∠NBE=∠BAO，

在△ABO 和△BEN 中，$\begin{cases}\angle AOB=\angle BNE,\\ \angle BAO=\angle NBE,\\ AB=BE,\end{cases}$

∴△ABO≌△BEN（AAS），∴$OB=NE=BF$．

∵∠OBF=∠FBP=∠BNE=90°，在△BFP 和△NEP 中，

$\begin{cases}\angle FPB=\angle EPN,\\ \angle FBP=\angle ENP,\\ BF=NE,\end{cases}$ ∴△BFP≌△NEP（AAS），∴$BP=NP$，又∵ 点 A 的坐标为（8，0），

∴$OA=BN$=8，∴$BP=NP$=4．

10.由 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^3$ 得，$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^3$，两式相减，得 $a_n=3n^2-3n+1$，

当 $n\geq 2$ 时，$\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{3n(n-1)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})$，∴$\dfrac{1}{a_2-1}+\dfrac{1}{a_3-1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{100}-1}$

$=\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100})=\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{100})=\dfrac{33}{100}$．

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

11.8　12.3cm　13.$m\geq 2$ 且 $m\neq 3$　14.3　15.1　16.$\alpha-\beta=90°$

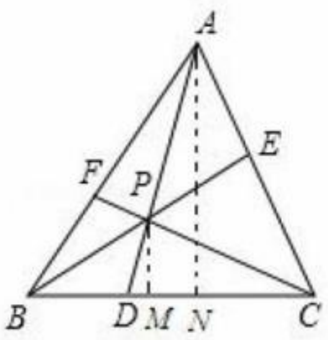
13.去分母得，$m-3=x-1$，解得 $x=m-2$，由题意得，$m-2\geq 0$，解得，$m\geq 2$，又 x=1 是分式方程的增根，所以当 x=1 时方程无解，所以 m 的取值范围是 $m\geq 2$ 且 $m\neq 3$．

14.$a^4-16a^2+100=a^4+20a^2+100-36a^2=(a^2+10)^2-(6a)^2=(a^2+10+6a)(a^2+10-6a)$，

∵a 是正整数，a^4-16a^2+100 是质数，∴它的质因数是 1 和它本身，

又∵$a^2+10+6a=(a+3)^2+1>1$，∴$a^2+10-6a=1$，$a^2-6a+9=0$，$(a-3)^2=0$，∴a=3．

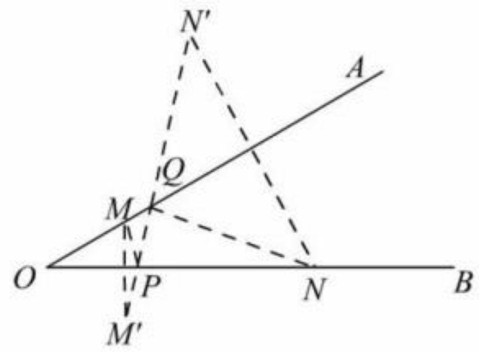
15.过 P 点作 $PM\perp BC$ 于点 M，过 A 点作 $AN\perp BC$ 于点 N.



$\triangle PBC$ 与$\triangle ABC$ 的面积比等于 PM 与 AN 的比，也等于 PD 与 AD 的比，同理，$\triangle PCA$ 与$\triangle ABC$ 的面积比等于 PE 与 BE 的比，$\triangle PAB$ 与$\triangle ABC$ 的面积比等于 PF 与 CF 的比，

$$\therefore \frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle BPC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

16.如图，作 N 点关于射线 OA 的对称点 N'，作 M 点关于射线 OB 的对称点 M'，连接 $M'N'$，则 $M'N'$ 与 OA 的交点即为 Q 点，与 OB 的交点即为 P 点．此时 $M'P=MP$，$N'Q=NQ$，



$MP+PQ+QN=M'P+PQ+N'Q=M'N'$，

由"两点之间线段最短"可知，此时 $MP+PQ+QN$ 最小．

$\because \angle AOB=30°$，$MM'\perp OB$，$\therefore \angle AMM'=120°$，

$\angle M'=\angle M'MP=120°-\alpha$，

$\therefore \angle MPQ=2$（$120°-\alpha$）．又$\because NN'\perp OA$，

$\therefore \angle ONN'=60°$，$\therefore \angle QNN'=\angle N'=60°-\beta$，

$\therefore \angle MQP=\angle AQN'=90°-$（$60°-\beta$）$=30°+\beta$.

在$\triangle MPQ$ 中，$\alpha+30°+\beta+2$（$120°-\alpha$）$=180°$，化简得$\alpha-\beta=90°$．

三、解答题（共 5 小题，共 50 分）

17.解：（1）画图略，A_1（3，2），B_1（0，1），C_1（1，4）；

（2）$S_{六边形CABB_1A_1C_1}=3\times8-2\times(2\times2\times\frac{1}{2})-2\times(1\times3\times\frac{1}{2})=17$.

18.证明：$\because AB$ 的垂直平分线 DN 交 BC 于点 D，

$\therefore BD=AD$，$\therefore \angle B=\angle BAD=22.5°$，$\therefore \angle ADE=2\angle B=45°$.

$\because AE\perp BC$ 于点 E，$\therefore \angle DEM=\angle AEC=90°$，$\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，$\therefore DE=AE$.

又$\because DF\perp AC$，$\therefore \angle EDM+\angle C=\angle CAE+\angle C=90°$，$\therefore \angle EDM=\angle EAC$，

在$\triangle DEM$ 与$\triangle AEC$ 中，$\because \begin{cases}\angle EDM=\angle EAC,\\ AE=DE,\\ \angle DEM=\angle AEC,\end{cases}$ $\therefore \triangle DEM\cong\triangle AEC$（ASA），$\therefore EM=EC$.

19.解：原式可化为 $3^{2a}\bullet2^{-3a}\bullet2^{b}\bullet5^{b}\bullet3^{-2b}\bullet2^{4c}\bullet3^{-c}\bullet5^{-c}=2$，即 $2^{-3a+b+4c}\bullet3^{2a-2b-c}\bullet5^{b-c}=2^1\times3^0\times5^0$，

故$\begin{cases}-3a+b+4c=1,\\ 2a-2b-c=0,\\ b-c=0,\end{cases}$ 解得 $a=3$，$b=2$，$c=2$.

20.解：（1）设乙队单独完成这项工程需要 x 天，则甲队单独完成这项工程需要 $\frac{2}{3}x$ 天．根据题意，得 $\frac{10}{\frac{2}{3}x}+30(\frac{1}{\frac{2}{3}x}+\frac{1}{x})=1$．解得 $x=90$．经检验，$x=90$ 是原方程的根且符合实际情况．$\therefore \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\times90=60$.

答：甲、乙两队单独完成这项工程分别需要 60 天和 90 天.

（2）设甲、乙两队合作完成这项工程需要 y 天，则有 $y(\frac{1}{60}+\frac{1}{90})=1$.

解得 $y=36$．需要施工费用：36×（8.4+5.6）=504（万元）．$\because 504>500$.

$\therefore$工程预算的施工费用不够用，需追加预算 4 万元.

21. (1) 证明：如图①，作$\angle DAH=\angle EAB$交DE于点H，$\therefore \angle DAB=\angle HAE$，

$\because \angle EAB=\angle EDB$，$\angle APE=\angle BPD$，$\therefore \angle ABD=\angle AEH$，

在$\triangle ABD$和$\triangle AEH$中，$\begin{cases} \angle DAB=\angle HAE, \\ AB=AE, \\ \angle ABD=\angle AEH, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABD\cong\triangle AEH$（ASA），

$\therefore BD=EH$，$AD=AH$．又$\because \angle DAH=\angle EAB=60°$，$\therefore \triangle ADH$是等边三角形，$\therefore AD=HD$，

$\because ED=HD+EH$，$\therefore ED=AD+BD$；

（2）不满足，$ED=BD-\sqrt{2}AD$．证明如下：

如图②，作$\angle DAH=\angle EAB$交DE于点H，$\therefore \angle DAB=\angle HAE$，

$\because \angle EDB=\angle EAB=90°$，$\therefore \angle ABD+\angle 1=\angle AEH+\angle 2=90°$，

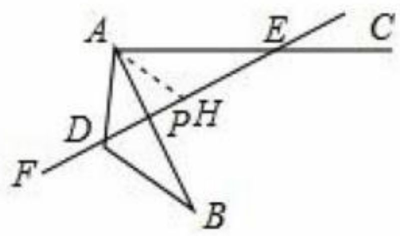
$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle ABD=\angle AEH$，在$\triangle ABD$和$\triangle AEH$中，$\begin{cases} \angle DAB=\angle HAE, \\ AB=AE, \\ \angle ABD=\angle AEH, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle AEH$（ASA），$\therefore BD=EH$，$AD=AH$，

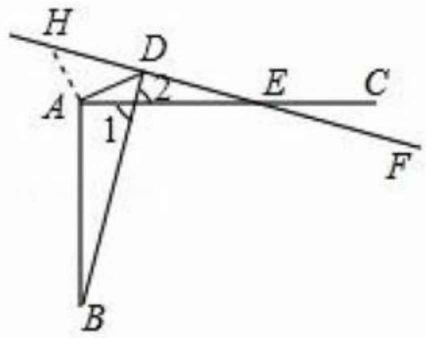
又$\because \angle DAH=\angle EAB=90°$，$\therefore \triangle ADH$是等腰直角三角形，$\therefore HD=\sqrt{2}AD$，

$\because ED=EH-HD$，

$\therefore ED=BD-\sqrt{2}AD$．



图①



图②