考场　　　联系电话　　　准考证号　　　学校　　　父母姓名　　　年级　　　姓名　　　赛区
装　　　订　　　线

第 14 届世界奥林匹克数学竞赛（中国区）选拔赛

考生须知：

1. **每位考生将获得一份试卷。考试期间，不得使用计算工具或手机。**
2. **本卷共 120 分，选择题每小题 4 分，填空题每小题 5 分，解答题共 5 小题，共 50 分。**
3. **请将答案写在答题卡上。考试完毕时，试卷、答题卡及草稿纸会被收回。**
4. **若计算结果是分数，请化至最简。**

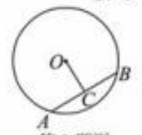
九年级全国总决赛复赛

（本试卷满分 120 分 ，考试时间 90 分钟）

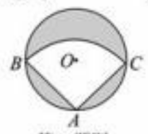
一、**选择题**（每小题 4 分，共 40 分）

1. 下列成语所描述的事件是必然事件的是（　　）
   A．水中捞月　B．水涨船高　C．一箭双雕　D．揠苗助长

2. 如图，⊙O 的半径为 5，AB 为⊙O 的弦，OC 平分 AB．若 OC=3，则 AB 的长为（　　）
   A．4　B．6　C．8　D．10



第 2 题图



第 5 题图

3. 在平面直角坐标系中，将二次函数 $y=-2(x-1)^2-2$ 的图象先向上平移 1 个单位，再向左平移 1 个单位，则其顶点坐标为（　　）
   A．（0，−3）　B．（2，−3）　C．（0，−1）　D．（2，−1）

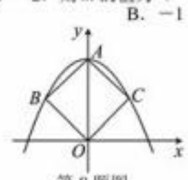
4. 刘谦的魔术表演风靡全国，小雨也学起了刘谦发明了一个魔术盒，当任意实数对（a，b）进入其中时，会得到一个新的实数：a^2+b-1，例如：把（3，−2）放入其中，就会得到 $3^2+(-2)-1=6$．现将实数对（m，$-2m$）放入其中，得到实数 2，则 m 的值是（　　）
   A．3　B．−1　C．−3 或 1　D．3 或−1

5. 如图，有一直径是 2 米的圆形铁皮，现从中剪出一个圆心角是 90°的最大扇形 ABC，用该扇形铁皮围成一个圆锥，则所得圆锥的底面圆的半径为（　　）
   A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 米　B．$\frac{\sqrt{2}}{4}$ 米　C．$\frac{1}{2}$ 米　D．$\frac{1}{4}$ 米

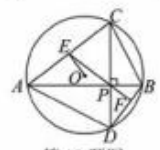
6. 某种产品按质量分为 10 个档次，生产最低档次产品，每件获利润 8 元，每提高一个档次，每件产品利润增加 2 元．用同样工时，最低档次产品每天可生产 60 件，提高一个档次将减少 3 件．如果用相同的工时生产，总获利润最大的产品是第 k 档次（最低档次为第一档次，档次依次随质量增加），那么 k 等于（　　）
   A．5　B．8　C．9　D．10

7. △ABC 的一边长为 5，另两边长分别是方程 $x^2-6x+m=0$ 的两根，则 m 的取值范围是（　　）
   A．$m>\frac{11}{4}$　B．$\frac{11}{4}<m\le 9$　C．$\frac{11}{4}\le m\le 9$　D．$m\le\frac{11}{4}$

8. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+mc$（$a\ne0$）的图象经过正方形 $ABOC$ 的三个顶点，且 $ac=-2$，则 m 的值为（　　）
   A．1　B．−1　C．2　D．−2



第 8 题图



第 10 题图

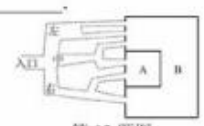
9. 任意大于 1 的正整数 m 的三次幂均可“分裂”成 m 个连续奇数的和，如：$2^3=3+5$，$3^3=7+9+11$，$4^3=13+15+17+19$，…按此规律，若 m^3 分裂后其中有一个奇数是 2015，则 m 的值是（　　）
   A．46　B．45　C．44　D．43

10. 如图，△ABC 内接于⊙O，$CD\perp AB$ 于 P，交⊙O 于 D，E 为 AC 的中点，EP 交 BD 于 F．有下面两个结论：①$EF\perp BD$；②$OE=\frac{1}{2}BD$．下面判断正确的是（　　）
    A．①正确②不正确　B．①②都正确　C．①不正确②正确　D．①②都不正确

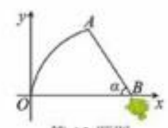
二、**填空题**（每小题 5 分，共 30 分）

11. 已知实数 a，b 满足 $(2-a)^2+\sqrt{a-b-c}+|c-8|=0$，则二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有__________个交点．

12. 近几年，“密室逃脱俱乐部”风靡全球．如图是该俱乐部的通路俯视图，有 A、B 两个密室，齐齐进入入口后，可从左、中、右三条通道中任选一条．则齐齐进入 A 密室的概率为__________．



第 12 题图



第 13 题图

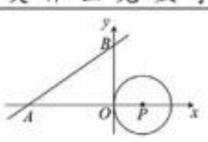
13. S 村举行钓鱼比赛．如图，选手甲钓到了一条大鱼，鱼竿被拉弯近似可看作以 A 为最高点的一条抛物线，鱼线 AB 长 6m，鱼隐约在水面了，估计鱼离鱼竿支点 O 有 8m，此时鱼竿、鱼线呈一个平面，且鱼线与水平面夹角α恰好为 60°，以鱼竿支点 O 为原点，则鱼竿所在抛物线的解析式为__________（顶点式）．

14. 已知 x，y，z 为实数，且满足 $x+2y-5z=-7$，$x-y+z=2$，试比较 x^2-y^2 与 z^2 的大小关系是__________．

15. 若方程 $(x^2-1)(x^2-4)=k$ 有四个非零实根，且它们在数轴上对应的四个点等距排列，则 k=__________．

世界奥林匹克数学竞赛（中国区）选拔赛

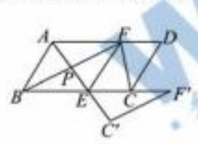
16. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 与 x 轴、y 轴分别相交于 A、B 两点，圆心 P 的坐标为（1，0），圆 P 与 y 轴相切于点 O．若将圆 P 沿 x 轴向左平移，当圆 P 与该直线相交时，横坐标为整数的点 P 有__________个．



三、**解答题**（共 5 小题，共 50 分）

17. 关于 x 的方程 $mx^2+(m+2)x+\frac{m}{4}=0$ 有两个不相等的实数根，是否存在实数 m，使方程的两个实数根的倒数和等于 0？若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由．（9 分）

18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AE 平分∠BAD，BF 平分∠ABC．若∠ABC=60°，将△EFC 绕点 E 顺时针旋转，使点 F 落在 BC 的延长线上点 F'处，点 C 落在点 C'处，求证：点 C'和点 F 之间的距离等于平行四边形 $ABCD$ 较短对角线的长．（9 分）



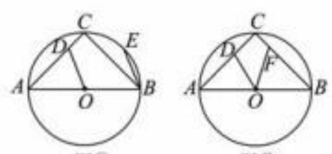
19. 某乒乓球馆使用发球机进行辅助训练，出球口在桌面中线端点 A 处的正上方，假设每次发出的乒乓球的运动路线固定不变，且落在中线上．在乒乓球运行时，设乒乓球与端点 A 的水平距离为 x（米），与桌面的高度为 y（米），运行时间为 t（秒），经多次测试后，得到如下部分数据：

t（秒）	0	0.16	0.2	0.4	0.6	0.64	0.8	…
x（米）	0	0.4	0.5	1	1.5	1.6	2	…
y（米）	0.25	0.378	0.4	0.45	0.4	0.378	0.25	…

（1）观察上表中的数据，y 与 x 满足你所学过的哪一种函数关系？求出 y 关于 x 的函数关系式；（5 分）

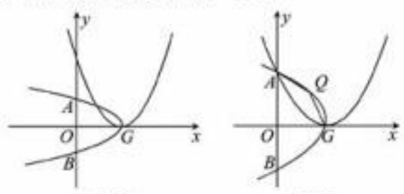
（2）乒乓球落在桌面时，与端点 A 的水平距离是多少？（5 分）

20. 已知：⊙O 为 Rt△ABC 的外接圆，点 D 在边 AC 上，$AD=AO$．
    （1）如图①，若弦 $BE\parallel OD$，求证：$OD=BE$；（5 分）
    （2）如图②，点 F 在边 BC 上，$BF=BO$，若 $OD=2\sqrt{2}$，$OF=3$，求⊙O 的直径．（5 分）



图①　图②

21. 点 P 为图①中抛物线 $y=x^2-2mx+m^2$（m 为常数，$m>0$）上任意一点，将抛物线绕顶点 G 逆时针旋转 90°后得到的新图象与 y 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的上方），点 Q 为点 P 旋转后的对应点．
    （1）当 m=2，点 P 的横坐标为 4 时，求 Q 点的坐标；（3 分）
    （2）设点 Q（a，b），用含 m、b 的代数式表示 a；（4 分）
    （3）如图②，若原抛物线恰好也经过 A 点，点 Q 在第一象限内，是否存在这样的点 P 使得 $AQ=GQ$？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．（5 分）



图①　图②

第14届全国总决赛9年级全国复赛答案

一、选择题（每小题4分，共40分）

1.B　2.C　3.C　4.D　5.B　6.C　7.B　8.A　9.B　10.B

4.由题意得：$m^2+(-2m)-1=2$，$m^2-2m-3=0$，$(m-3)(m+1)=0$，解得 $m_1=3$，$m_2=-1$.

5.连 BC，由题意得∵⊙O 的直径 $BC=2$，∴$AB=\sqrt{2}$，设圆锥的底面圆的半径为 r，则 $2\pi r=\dfrac{90\times\pi\times\sqrt{2}}{180}$，解得 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，即圆锥的底面圆的半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 米.

6.第 k 档次产品比最低档次产品提高了（$k-1$）个档次，所以用相同工时生产，总利润为：$y=[60-3(k-1)][8+2(k-1)]=-6(k-9)^2+864$，当 $k=9$ 时，y 取得最大值，因此，生产第九档次产品获利润最大，每天获利864元.

7.设三角形另两边长分别为 a、b（$a\geq b$），根据题意得 $\Delta=(-6)^2-4m\geq 0$，解得 $m\leq 9$，而 $a+b=6$，$ab=m$，$a<b+5$，即 $a-b<5$，∴$(a-b)^2<25$，∴$(a+b)^2-4ab<25$，即 $36-4m<25$，∴$m>\dfrac{11}{4}$，∴m 的取值范围是 $\dfrac{11}{4}<m\leq 9$.

8.令 $x=0$，则 A 点坐标为（0，mc），因为四边形 $ABOC$ 为正方形，∴$\angle AOC=45°$，所以 C 点坐标为（$\dfrac{mc}{2}$，$\dfrac{mc}{2}$），将其代入 $y=ax^2+mc$（$a\neq 0$）中得：$\dfrac{mc}{2}=a\times\dfrac{m^2c^2}{4}+mc$，左右两边都除以 $\dfrac{1}{4}mc$ 得：$amc+2=0$，又有 $ac=-2$，∴$m=1$.

9.∵底数是2的分裂成2个奇数，底数为3的分裂成3个奇数，底数为4的分裂成4个奇数，…

∴m^3 有 m 个奇数，所以 2^3 到 m^3 的奇数的个数为：$2+3+4+\cdots+m=\dfrac{(m+2)(m-1)}{2}$，

∵$2n+1=2015$，$n=1007$，∴奇数2015是从3开始的第1007个奇数，

∵ $\dfrac{(44+2)(44-2)}{2}=966$，$\dfrac{(45+2)(45-2)}{2}=1015$，

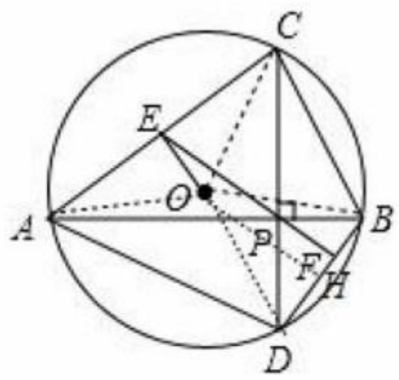
∴第1007个奇数是底数为45的数的立方分裂的奇数的其中一个，即 $m=45$.

10.∵$CD\perp AB$，∴$\angle APC=90°$，∵E 为 AC 的中点，即 PE 为 Rt△APC 的斜边上的中线，

∴$PE=CE$，∴$\angle ECP=\angle EPC$，而 $\angle EPC=\angle DPF$，$\angle CAP=\angle CDB$，

∴$\angle DPF+\angle PDF=\angle ACP+\angle CAP=90°$，∴$EF\perp BD$，故①正确；

作 $OH\perp BD$ 于点 H，连接 OA、OC、OB、OD，如图，



∵E 为 AC 的中点，∴$OE\perp AC$，

∴$\angle AOE=\dfrac{1}{2}\angle AOC$，$\angle DOH=\dfrac{1}{2}\angle BOD$，

∵$\angle ABC=\dfrac{1}{2}\angle AOC$，$\angle BCD=\dfrac{1}{2}\angle BOD$，

∴$\angle AOE=\angle ABC$，$\angle DOH=\angle BCD$，而 $\angle ABC+\angle BCD=90°$，

∴$\angle AOE+\angle DOH=90°$，而 $\angle AOE+\angle EAO=90°$，

∴$\angle EAO=\angle DOH$，　在△AOE 和△ODH 中，

$\begin{cases}\angle AEO=\angle OHD,\\ \angle EAO=\angle HOD,\\ OA=DO,\end{cases}$ ∴△AOE≌△ODH（AAS），∴$OE=DH$，

∵$OH\perp BD$，∴$BH=DH$，∴$OE=\dfrac{1}{2}BD$，故②正确．所以①②都正确.

二、填空题（每小题5分，共30分）

11.0　12.$\dfrac{1}{3}$　13.$y=-\dfrac{3\sqrt{3}}{25}(x-5)^2+3\sqrt{3}$　14.$x^2-y^2<z^2$　15.$\dfrac{7}{4}$　16.3

13.过点 A 作 $AC\perp OB$，交 OB 于点 C，∵$AB=6$ 米，$OB=8$ 米，$\alpha=60°$，∴$AC=3\sqrt{3}$ 米，$BC=3$ 米，∴$OC=OB-BC=5$ 米，故可得点 A 的坐标为（5，$3\sqrt{3}$），设鱼竿所在抛物线的解析式为 $y=a(x-5)^2+3\sqrt{3}$，又∵抛物线经过原点，∴$a(0-5)^2+3\sqrt{3}=0$，解得：$a=$

$-\dfrac{3\sqrt{3}}{25}$，故鱼竿所在抛物线的解析为：$y=-\dfrac{3\sqrt{3}}{25}(x-5)^2+3\sqrt{3}$．

14.联立两式得：$\begin{cases}x+2y=5z-7,\\x-y=2-z.\end{cases}$①－②得：$3y=6z-9$，即 $y=2z-3$，将 $y=2z-3$ 代入②得：$x-2z+3=2-z$，即 $x=z-1$，$\therefore x^2-y^2=(z-1)^2-(2z-3)^2=(3z-4)(2-z)=-3z^2+10z-8$，则 $x^2-y^2-z^2=-4z^2+10z-8=-4\left(z-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{7}{4}<0$，即 $x^2-y^2<z^2$．

15.设 $x^2=y$，原方程变为 $y^2-5y+(4-k)=0$，设此方程有实根 α，β（$0<\alpha<\beta$），则原方程的四个实根为 $\pm\sqrt{\alpha}$，$\pm\sqrt{\beta}$，由于它们在数轴上等距排列，$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}-(-\sqrt{\alpha})$，即 $\beta=9\alpha$，又 $\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=4-k$，由此求得 $k=\dfrac{7}{4}$，且满足 $\Delta=25+4k-16>0$，$\therefore k=\dfrac{7}{4}$．

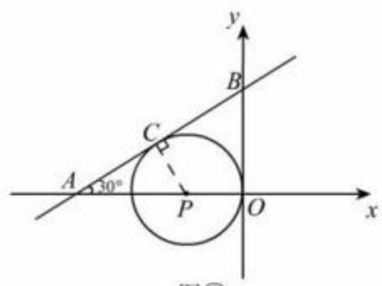
16.当直线与圆相切时，设 P 点坐标为（x，0），$\because$圆心 P 的坐标为（1，0），

$\therefore$圆的半径为 1．由题意可求得 $OA=3$，$OB=\sqrt{3}$，$\therefore AB=2\sqrt{3}$，$\therefore \angle BAO=30°$．

当圆 P 在直线 AB 的右侧与其相切（如图①）时，

在 Rt$\triangle APC$ 中，$PC=\dfrac{1}{2}AP$，

$\therefore 1=\dfrac{1}{2}(x+3)$，解得 $x=-1$；



图①

当圆 P 在直线 AB 的左侧与其相切（如图②）时，

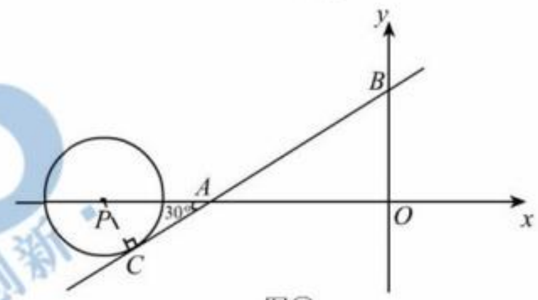
在 Rt$\triangle APC$ 中，$PC=\dfrac{1}{2}AP$，

$\therefore 1=\dfrac{1}{2}(-3-x)$，解得 $x=-5$；

故当 $x=-1$ 或 $x=-5$ 时，直线 AB 与圆 P 相切，

$\therefore$当 $-5<x<-1$ 时，直线 AB 与圆 P 相交，

$\therefore$满足条件的 x 的值为 -2，-3，-4，横坐标为整数的点 P 共有 3 个．



图②

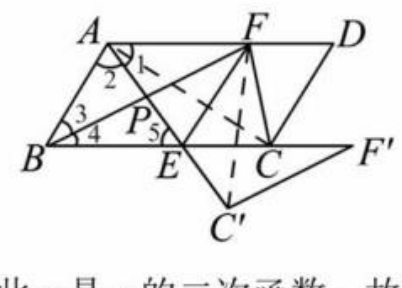
三、解答题（共 5 小题，共 50 分）

17.解：不存在符合条件的实数 m．理由如下：由 $\Delta=(m+2)^2-4m\cdot\dfrac{m}{4}>0$，得 $m>-1$，又$\because m\neq0$，$\therefore m>-1$ 且 $m\neq0$；设方程的两根为 x_1，x_2，由题意可得：$x_1+x_2=-\dfrac{m+2}{m}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{4}$，若 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=0$，则解得 $m=-2$，此时 $\Delta<0$，$\therefore$原方程无解，故不存在符合条件的实数 m．

18.解：如图，$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD\parallel BC$，$\therefore \angle1=\angle5$，$\because \angle1=\angle2$，$\therefore \angle2=\angle5$，$\therefore AB=BE$，同理，$AB=AF$，$\therefore AF=BE$．又$\because AF\parallel BE$，$\therefore$四边形 $ABEF$ 是平行四边形，而 $AB=AF$，$\therefore$平行四边形 $ABEF$ 是菱形．

连接 CA，$C'F$，$\because \angle ABC=60°$，四边形 $ABEF$ 是菱形，$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形，$\angle AEB=\angle AEF=\angle FEC=\angle F'EC'=60°$，$\therefore \angle AEC=\angle FEC'=120°$．

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle FEC'$ 中，$\begin{cases}AE=FE,\\\angle AEC=\angle FEC',\\EC=EC',\end{cases}$



$\therefore \triangle AEC\cong\triangle FEC'$，$\therefore AC=FC'$，结论得证．

19.（1）由表格中数据可得，$t=0.4$ 时，乒乓球达到最大高度，因此 y 是 x 的二次函数，故可设 $y=a(x-1)^2+0.45$，将（0，0.25）代入，可得：$a=-\dfrac{1}{5}$，则 $y=-\dfrac{1}{5}(x-1)^2+0.45$．

（2）当 $y=0$ 时，$0=-\dfrac{1}{5}(x-1)^2+0.45$，解得：$x_1=\dfrac{5}{2}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$（舍去），即乒乓球与端点 A 的水平距离是 $\dfrac{5}{2}$ m．

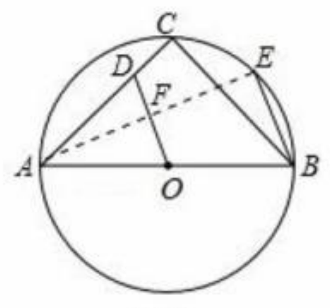
20.（1）证明：如图①，连接 AE 交 OD 于点 F，

∵AB 为直径，∴$AE\perp BE$，

∵$BE/\!/OD$，∴$AE\perp OD$，

∵$AD=AO$，∴AE 平分∠CAB，∴$OD=2OF$，

∵$BE=2OF$，∴$BE=OD$；



图①

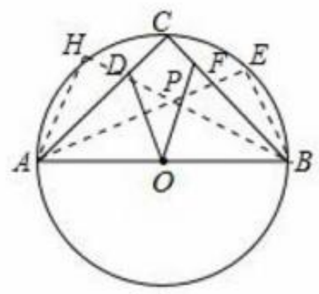
（2）如图②，分别作弦 $BE/\!/OD$，$AH/\!/OF$，连接 AE，BH，AE 与 BH 交于点 P，由（1）得 E 为弧 BC 的中点，同理可得 H 为弧 AC 的中点，∴∠HAE=∠HBE=45°；

∵AB 为直径，∴∠H=∠E=90°，∴$AP=\sqrt{2}\,AH$，$PE=BE$，

由（1）可得 $OD=BE$，∴$EB=OD=2\sqrt{2}$，

∴ $PE=BE=2\sqrt{2}$，同理 $AH=OF=3$，∴$AP=3\sqrt{2}$，

在 Rt△ABE 中，$AE=5\sqrt{2}$，$BE=2\sqrt{2}$，



图②

根据勾股定理得：$AB=\sqrt{58}$，则圆的直径为 $\sqrt{58}$.

21.解：（1）当 $m=2$ 时，原抛物线的解析式为 $y=(x-2)^2$，

则 G（2，0），P（4，4）. 如图①，连接 QG、PG，过点 Q 作 $QF\perp x$ 轴于点 F，过点 P 作 $PE\perp x$ 轴于点 E，依题意可得△GQF≌△PGE（AAS），则 $FQ=EG=2$，$FG=EP=4$，

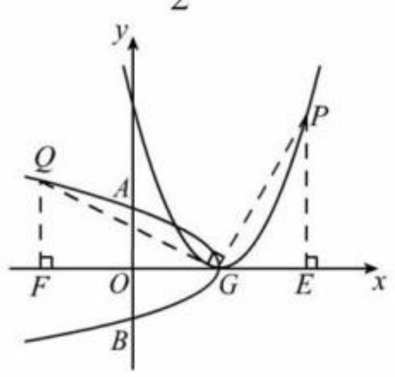
∴$FO=2$，∴Q（−2，2）.

（2）以图①为例，已知 Q（a，b），则 $QF=b$，$FG=m-a$，由（1）知：$PE=FG=m-a$，$GE=QF=b$，∴$OE=m+b$，即 P（$m+b$，$m-a$），将其代入 $y=(x-m)^2$ 中，得：$m-a=(m+b-m)^2$，即 $a=m-b^2$. (其他情况答案也相同)

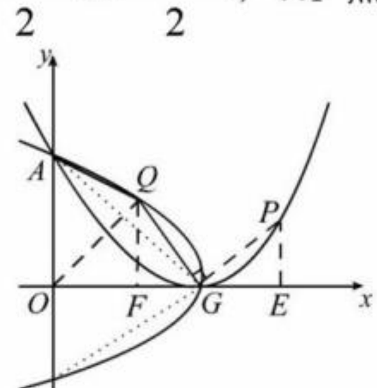
（3）存在. 如图②，若连 AG，BG，由抛物线的对称性可得 $AO=BO$，又 $AB\perp OG$，∴$AG=BG$，即 BG 为 AG 旋转以后的对应线段，故∠AGB=90°，∠AGO=∠BGO=45°，又∠AOG=90°，∴$AO=GO$，即 $m^2=m$，解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=1$. 连 OQ，∵$AQ=GQ$，$OA=OG$，$OQ=OQ$，∴△AOQ≌△GOQ（SSS），∴∠AOQ=∠GOQ=45°，作 $QF\perp x$ 轴于 F 点，则 $OF=QF$，故可设 Q（a，a），由（2）可得 $a=1-a^2$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（舍负），

∴Q（$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$）. 过 G 点作 QG 的垂线，则该垂线与原抛物线的交点即为 P 点. 作 $PE\perp x$ 轴于 E 点，易得△QFG≌△GEP（AAS），∴$PE=FG=1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，

$EG=QF=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴$OE=1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，∴$P$ 点坐标为（$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$）.



图①



图②